JOURNAL OF ALGEBRA **176**, 392–416 (1995)

Série de Hilbert d'une algèbre de polynômes quotient

Marc Aubry*

Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné, URA CNRS n168, Université de Nice Sophia-Antipolis, F-06018 Nice Cedex 2, France

Communicated by Melvin Hochster

Received February 7, 1994

Let $R \cong \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]/(F_1, \ldots, F_n)$ where $(F_1, \ldots, F_n)$ denotes the ideal of homogeneous polynomials $F_1, \ldots, F_n$ of degree $d_k = \deg F_k$. Let us graduate $R = R_0 \oplus \cdots \oplus R_i \oplus \ldots$ by setting $\deg x_1 = \cdots = \deg x_r = 1$ and define the Hilbert series of R by Hilb $R(t) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \dim R_i t^i$. Then we have a lower bound (coefficientwise order). An old conjecture says that this lower bound is "generically" attained. The only general result (any r, any n) due to [M. Hochster and D. Laksov, *Comm. Algebra* **15** (1987), 227–239] tells us that it holds for the first non-trivial degree, i.e., in degree $1 + \min_{1 \leq k \leq n} d_k$. In this paper we enlarge this result to a "wide" range of degrees.

1. INTRODUCTION

En géométrie ou en algèbre, en particulier en algèbre homologique, de nombreuses démonstrations nécessitent l'évaluation de la dimension (linéaire) en chaque degré de certains $\mathbf{k}$-espaces vectoriels gradués $R = (R_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Les calculs sont très souvent facilités par l'introduction de la série formelle, dite série de Hilbert: Hilb $R(t) = \sum_{i \in \mathbf{N}} \dim R_i t^i$.

Le cas où R est une $\mathbf{k}$-algèbre revêt une importance particulière. Limitons-nous aux algèbres graduées, commutatives, finiment engendrées en degré 1, c'est-à-dire supposons qu'il existe r générateurs de degré 1, $x_1, \ldots, x_r$ et un idéal I de $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]$ tels que $R \cong \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]/I$.

Définissions la relation d'ordre partiel habituelle sur les séries $(\sum a_i t^i \leq \sum b_i t^i) \Leftrightarrow (a_i \leq b_i$ pour tout $i \in \mathbf{N})$ et posons $|\sum a_i t^i| = \sum c_i t^i$ avec $c_i = a_i$ si $a_j \geq 0$ pour $j \leq i$, $c_i = 0$ sinon. On peut supposer que I est l'idéal $(F_1, \ldots, F_n)$ engendré par les n polynômes $F_1, \ldots, F_n$, $d_k = \deg F_k$. Alors

* E-mail address: aubry@math.unice.fr.

0021-8693/95 $12.00

quels que soient $F_1, \ldots, F_n$, on conjecture la minoration

$$\operatorname{Hilb} \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]/(F_1, \ldots, F_n) \geq \left|(1-t)^{-r} \prod_{k=1}^{n} (1-t^{d_k})\right| \equiv \sum m_i t^i. \tag{1}$$

(La conjecture est due à Fröberg [5] qui a aussi montré qu'elle était impliquée par la conjecture 1.1.)

D'un autre côté, si l'on se restreint au cas où les F_k sont de même degré d, on a la majoration

$$\sum M_i t^i \geq \operatorname{Hilb} \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]/(F_1, \ldots, F_n), \tag{2}$$

où $M_i = \dim \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]_i$ si $i \leq d$ et $M_{d+i} = R_{d,i}(n)$ (cf. la définition de la coreprésentation de Macaulay 4.4). De plus ce majorant est atteint: pour tout n il existe une famille $F_1, \ldots, F_n$ telle que Hilb $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]/(F_1, \ldots, F_n) = \Sigma M_i t^i$ (cf. [7]).

Les familles $F_1, \ldots, F_n$ vérifiant (2) sont "exceptionnelles"; on conjecture qu'en fait Hilb $\mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]/(F_1, \ldots, F_n)$ est "génériquement" égal à son minorant $\Sigma m_i t^i$.

Ce qui s'énonce plus précisément:

Conjecture 1.1. Pour $(F_1, \ldots, F_n)$ des polynômes homogènes de degré $d_k = \deg F_k$, $1 \leq k \leq n$ génériques, la série de Hilbert de l'algèbre quotient $Q \equiv \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]/(F_1, \ldots, F_n)$ est donnée par

$$\operatorname{Hilb} Q(t) = \left|(1-t)^{-r} \prod_{k=1}^{n} (1-t^{d_k})\right|. \tag{3}$$

On a quelques résultats dans cette direction; la conjecture 1.1 est vraie

— si $n = r + 1$ et $d_1 = \cdots = d_n = 2$ [5] et même si les degrés $d_1, \ldots, d_n$ sont quelconques (Stanley, cf. [9]);

— si $r = 2$ [5];

— si $r = 3$ [1];

— pour tout r, mais dans le seul degré $1 + \min_{1 \leq k \leq n} d_k$ [8].

L'objet de cette note est d'étendre, dans le cas où les F_k sont de même degré d, les résultats de [8] à tout un domaine. (A la lecture du théorème 2.3, cette phrase est présomptueuse; cependant, les restrictions mentionnées dans 2.3 sont partiellement dues aux simplifications apportées dans la discussion de formules combinatoires compliquées. S'il le désire, le lecteur pourra se convaincre que dans le cas $d' = 1$ la méthode exposée conduit en quelques lignes au résultat de [8].)

Je tiens à remercier ici A. Hirschowitz qui a attiré mon attention sur ce problème et soupçonné l'utilité de [4] pour étendre les résultats de [8], ainsi que A. Iarriobino qui m'a communiqué les références liées aux résultats de Macaulay.

2. NOTATIONS ET RÉSULTAT PRINCIPAL

Soit V un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathbf{k}$ un corps infini. Eventuellement on privilégiera une base $(e_i)_i$ de V et on notera $(x_1, \ldots, x_r)$ les coordonnées d'un élément de V.

Soit SV l'algèbre symétrique sur V; elle est graduée par le degré ordinaire qui attribue à V le degré 1; pour un sous-ensemble X de SV, on notera X_d la partie de degré d; pour $X = SV$ on notera aussi indifféremment $(SV)_d$ ou S^dV les polynômes de degré d.

Le choix de la base induit un isomorphisme: $SV \cong \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]$.

On se donne n polynômes (homogènes) $F_1, \ldots, F_n$ de $S^dV = (SV)_d$ et on note $(F_1, \ldots, F_n)$ l'idéal de SV engendré (on souligne que tous les polynômes homogènes sont de même degré d).

On considère l'algèbre quotient $Q = SV/(F_1, \ldots, F_n)$.

Notons $(F_1, \ldots, F_n)_{d+d'} = (F_1, \ldots, F_n) \cap S^{d+d'}V$, l'espace vectoriel des éléments de degré $d + d'$ dans l'idéal $(F_1, \ldots, F_n)$.

La conjecture se formule ainsi:

Conjecture 2.2. Pour $(F_1, \ldots, F_n)$ des polynômes homogènes de degré d génériques la série de Hilbert de l'algèbre quotient Q est donnée par

$$\operatorname{Hilb} Q(t) = |(1-t)^{-r}(1-t^d)^n|, \tag{4}$$

où $|\Sigma a_i t^i| = \Sigma b_i t^i$ avec $b_i = a_i$ si $a_j > 0$ pour les $j \leq i$ et $b_i = 0$ sinon.

Autrement dit, il existe un ouvert de

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = F : \mathbf{k}^n \xrightarrow{F} S^dV \right\} \tag{5}$$

tel que $\dim Q_{d+d'} = 0$ dès que

$$n\binom{r+d'-1}{d'} + \cdots + (-1)^{i-1}\binom{n}{i}\binom{r+d'-(i-1)d-1}{d'-(i-1)d} + \cdots$$
$$\geq \binom{r+d+d'-1}{d+d'}$$

et

$$\dim Q_{d+d'} = \binom{r+d+d'-1}{d+d'} - \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\binom{n}{i}\binom{r+d'-(i-1)d-1}{d'-(i-1)d}$$

sinon.

Dans ce qui suit on se limitera au cas où $d' < d$ (domaine où n'apparaissent pas les syzygies) et donc on discute selon le signe de

$$n\binom{r+d'-1}{d'} - \binom{r+d+d'-1}{d+d'}.$$

THÉORÈME 2.3. *Tant que*

$$d \geq \delta'(d', r-1) \equiv 2d'\frac{r-1}{\sqrt[r-1]{(r-1)!}} - d' + \frac{(d')^2}{\sqrt[r-2]{(r-2)!}} + \frac{(r-1)^2}{\sqrt[r-1]{r-1!}} - r + 5$$

et $r \geq 4$ *la formule* (4) *est vraie comme développement limité au degré* $d + d'$.

Il s'agit donc, dans le domaine $d' < d$, de montrer l'existence

(i) d'un ouvert de $\mathscr{F}$ tel que pour F dans cet ouvert

$$Q_{d+d'} = 0 \qquad \text{dès que } n\binom{r+d'-1}{d'} \geq \binom{r+d+d'-1}{d+d'};$$

(ii) d'un ouvert de $\mathscr{F}$ tel que pour F dans cet ouvert

$$Q_{d+d'} = \binom{r+d+d'-1}{d+d'} - n\binom{r+d'-1}{d'}$$
$$\text{dès que } n\binom{r+d'-1}{d'} < \binom{r+d+d'-1}{d+d'}.$$

Sur l'intersection de ces deux ouverts la conjecture est alors vérifiée.

Remarque. On ne prétend pas que la borne δ' soit la meilleure possible. La méthode de mise en équation exposée calcule des majorants qui ne sont pas nécessairement atteints. La discussion de l'inéquation obtenue, par souci de simplification, introduit aussi de nouvelles approximations.

Le plan est maintenant le suivant: la section 3 met en place la méthode pour aborder la partie (i); le problème est ramené à l'estimation de la dimension d'une sous-variété de $\mathcal{F}$ et donc à la discussion d'une inéquation. On traite à part dans la section 4 le point délicat de cette estimation. La section 5 est consacrée à la discussion de l'inéquation trouvée en 3 et 4 et l'on réserve à la section 6 une partie très technique de la démonstration. Les sections 5 et 6 sont une suite de calculs élémentaires; cependant, leur enchaînement ne coule pas de source et nous les avons reproduits à l'intention du lecteur qui tiendrait à les effectuer. La section 7 examine la partie (ii). L'appendice est une variante de la section 4; les deux méthodes, celle de la section 4 et celle de l'appendice, bien que ne se réduisant pas l'une à l'autre, fournissent la même estimation.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 2.2: MISE EN ÉQUATIONS

On refait ici brièvement le raisonnement utilisé dans [4], développé par [3] et repris par [11].

Un lecteur attentif de [11] aura sans doute remarqué que sa méthode diffère légèrement de celle de [4] (comparer la section 4 et l'appendice). La méthode [4] est plus simple à mettre en œuvre et permet donc aussi de simplifier la démonstration faite dans [11]. La méthode [11] est brièvement rappelée dans l'appendice, dans le seul but de convaincre le lecteur qu'elle ne permet pas d'améliorer les résultats.

On rappelle donc brièvement les constructions introduites par [4].

Tout repose sur l'étude des morphismes linéaires

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix} = F : \mathbf{k}^n \to S^d V.$$

En effet, $Q_{d+d'} = 0$ si et seulement si $F(d') : \mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V \to S^{d+d'}V$ est surjectif où $F(d')$ est la composée

$$\begin{tikzcd} \mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V \arrow[r, "F \otimes S^{d'}V"] \arrow[dr, "F(d')"'] & S^d V \otimes S^{d'} V \arrow[d, "\pi"] \\ & S^{d+d'} V \end{tikzcd}$$

où π est le produit $\pi(P \otimes P') = PP'$.

Etudier la surjectivité de $F(d'): \mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V \to S^{d+d'}V$, c'est étudier les formes linéaires (non nulles)

$$f: S^{d+d'} \to \mathbf{k}$$

telles que $f \circ F(d') = 0$. Comme dans [4] l'étude de telles formes f est transférée en celle des morphismes linéaires associés $S^dV \xrightarrow{f^*} S^{d'}\check{V}$; j étant le morphisme canonique $j: \mathbf{k} \to S^{d'}V \otimes S^{d'}\check{V}$, f^* est défini par le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd} S^dV \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "S^dV\otimes j"'] & S^{d'}\check{V} \\ S^dV \otimes S^{d'}V \otimes S^{d'}\check{V} \arrow[r, "\pi\otimes S^{d'}\check{V}"] & S^{d+d'}V \otimes S^{d'}\check{V} \arrow[u, "f\otimes S^{d'}\check{V}"'] \end{tikzcd}$$

Nous avons maintenant les éléments pour reprendre le raisonnement fait par [11].

Soit le sous-schéma $\mathcal{S} \subset \mathcal{F} = \mathrm{Hom}(\mathbf{k}^n, S^dV)$ des formes F telles que $F(d')$ ait un conoyau non trivial.

On va montrer que

$$\dim \mathcal{S} \leq \dim \mathcal{F} - 1 = n\binom{r+d-1}{d} - 1.$$

Pour cela on considère le schéma $\mathcal{T}$ des couples (F, f) où f est une forme linéaire non-nulle $S^{d+d'}V \to \mathbf{k}$ telle que $f \circ F(d') = 0$.

Examinons la projection $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$; la fibre est stable par homothétie; il suffit donc de montrer que $\dim \mathcal{T} \leq n\binom{r+d-1}{d}$.

Soit maintenant le schéma $\mathcal{T}^*$ formé des couples (F, f) où f^* associée à f vérifie: $f^* \circ F = 0$. Comme $\mathcal{T}$ est un sous-schéma de $\mathcal{T}^*$, il suffit de montrer que $\dim \mathcal{T}^* \leq n\binom{r+d-1}{d}$.

Définissons la strate $\mathcal{T}^*(s) \subset \mathcal{T}^*$ par les couples (F, f) de $\mathcal{T}^*$ avec $\mathrm{rg}\, f^* = s$. Examinons la projection $\mathcal{T}^*(s) \to \mathcal{J}(s)$ où $\mathcal{J}(s)$ est le schéma des formes $f: S^{d+d'}V \to \mathbf{k}$ telles que $f^* \circ F = 0$, f^* de rang s. La fibre correspondante est de dimension $[\binom{r+d-1}{d} - s]n$.

Supposons que l'on connaisse un majorant $M(s)$ de la dimension de $\mathcal{J}(s)$. La discussion précédente nous fournit alors l'inéquation fondamentale

$$\dim \mathcal{T} \leq \max_s \left(M(s) + \left[\binom{r+d-1}{d} - s \right] n \right) \leq n\binom{r+d-1}{d} = \dim \mathcal{F}. \tag{6}$$

4. DIMENSION DE $\mathscr{J}(S)$

En préliminaire nous allons d'abord fixer quelques notations et rappeler quelques résultats sur la série de Hilbert d'un idéal d'une algèbre de polynômes engendré par une partie homogène (de degré d dans tout ce qui suit).

DEFINITION 4.4. Soit r, d, d' trois entiers strictement positifs. Alors tout entier s tel que $0 \leq s < \binom{r+d'-1}{d'}$ admet

(i) une décomposition, dite décomposition de Macaulay, sous la forme

$$s = \binom{r+\delta_0-1}{\delta_0} + \binom{r-1+\delta_1-1}{\delta_1} + \cdots + \binom{2+\delta_{r-2}-1}{\delta_{r-2}}$$

unique si $-1 \leq \delta_{r-2} \leq \cdots \leq \delta_1 \leq \delta_0 < d'$, avec la convention habituelle $\binom{a}{b} = 0$ si $b < 0$.

On définit l'entier $D_{d,d'}(s)$, noté aussi $D(s)$ quand le contexte est clair, par

$$D_{d,d'}(s) = \binom{r+\delta_0+d-1}{\delta_0+d} + \binom{r-1+\delta_1+d-1}{\delta_1+d} + \cdots + \binom{2+\delta_{r-2}+d-1}{\delta_{r-2}+d}$$

où $\binom{a+d}{b+d} = 0$ si $b < 0$.

(ii) une décomposition, dite codécomposition de Macaulay, sous la forme

$$s = \binom{\rho_{d'}+d'-1}{d'} + \binom{\rho_{d'-1}+d'-1-1}{d'-1} + \cdots + \binom{\rho_1+1-1}{1}$$

unique si $0 \leq \rho_1 \leq \cdots \leq \rho_{d'-1} \leq \rho_{d'} < r$, avec la convention habituelle $\binom{a}{b} = 0$ si $b < 0$.

On définit l'entier $R_{d,d'}(s)$, noté aussi $R(s)$ quand le contexte est clair par

$$R_{d,d'}(s) = \binom{\rho_{d'} + d' + d - 1}{d' + d} + \binom{\rho_{d'-1} + d' + d - 1 - 1}{d' + d - 1} + \cdots + \binom{\rho_1 + 1 + d - 1}{1 + d}.$$

Ces décompositions interviennent dans le calcul des séries de Hilbert d'un idéal de polynômes homogénéiquement engendré. Soit $P = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]$ l'algèbre des polynômes en r variables sur un corps $\mathbf{k}$. Notons P_n l'espace vectoriel des polynômes de degré n; si U est un sous-espace de P_n de dimension t, on note $\bar{t}$ la codimension de U: $\bar{t} = \operatorname{codim} U = \binom{r+n-1}{n} - t$.

Soit I un idéal de P engendré par un sous-espace vectoriel W de P, homogène de degré d'. Posons $\dim W = s$.

THÉORÈME 4.5.

(i) [10, 12] $\dim I_{d'+d} \leq D_{d,d'}(s)$.

(ii) [6, 7] $\operatorname{codim} I_{d'+d} \geq R_{d,d'}(\bar{s})$.

De plus ces bornes sont atteintes pour les mêmes espaces W de générateurs de I et donc

$$\binom{r + d' + d - 1}{d' + d} - D_{d,d'}(s) = R_{d,d'}(\bar{s}) \equiv R_{d,d'}\left(\binom{r + d' - 1}{d'} - s\right).$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat qui fait l'objet de cette section.

PROPOSITION 4.6. *La dimension de la strate $\mathcal{J}(s)$ est majore par*

$$M(s) \equiv s\left[\binom{r + d' - 1}{d'} - s\right] + R(s). \tag{7}$$

La démonstration de cette proposition utilise le résultat suivant dont les notations se réfèrent à la section 3.

PROPOSITION 4.7. *Le rang de f^* est égal à s si et seulement si pour une base $(v_i)_i$ de V il existe s (et non $s + 1$) vecteurs linéairement indépendants $(v_{i_{j,1}} \cdots v_{i_{j,d'}})_{1 \leq j \leq s}$ dans $S^{d'}V$ tels que $(\langle v_{i_{j,1}} \cdots v_{i_{j,d'}}), f^*\rangle)_{1 \leq j \leq s}$ soient linéairement indépendants dans* $\operatorname{Hom}_{\mathbf{k}}(S^d V, \mathbf{k}) = (S^d V)^v \simeq S^d \check{V}$.

Démonstration de 4.7. C'est une démonstration d'algèbre linéaire semblable à celle de [4]. On en donne ici l'argument essentiel, laissant le soin au lecteur de poursuivre.

Complétons la donnée $(v_{i_{j,1}} \cdots v_{i_{j,d'}})_{1 \le j \le s}$ de l'énoncé en la base $(v_{i_{j,1}} \cdots v_{i_{j,d'}})_{1 \le j \le \binom{r+d'-1}{d'}}$ *de* $S^{d'}V$ *déterminée par la base* $(v_i)_i$ *de* V.

Notons pour simplifier $V_j' = (v_{i_{j,1}} \cdots v_{i_{j,d'}})$.

Soit de même $(V_j)_{1 \le j \le \binom{r+d-1}{d}}$ la base de S^dV associée à la base $(v_i)_i$ de V.

Examinons la matrice $(\alpha_{ji})_{j,i}$ avec

$$\alpha_{ji} = \langle V_i', f^* \rangle (V_j').$$

La colonne $(\alpha_{ji})_{1 \le j \le \binom{r+d-1}{d'}}$ représente la forme $< V_j', f^* >$ de $\mathrm{Hom}(S^dV, / \mathbf{k})$ dans la base duale de V_j.

De même la ligne $(\alpha_{ji})_{1 \le j \le \binom{r+d'-1}{d'}}$ représente la forme $f^*(V_j')$ de $\mathrm{Hom}(S^{d'}V, \mathbf{k})$ dans la base duale de (V_i').

Il suffit alors d'interpréter le rang de la matrice $(\alpha_{ji})_{j,i}$ soit à l'aide des vecteurs colonnes, soit à l'aide des vecteurs lignes pour obtenir la proposition. ▮

Démonstration de 4.6. On reprend les notations de la proposition 4.5. En particulier on note

(1) $(V_j')_{1 \le j \le \binom{r+d'-1}{d'}}$ la base de $S^{d'}V$ associée à la base $(v_i)_{1 \le i \le r}$ de V;

(2) $(V_j)_{1 \le j \le \binom{r+d'-1}{d'}}$ la base de S^dV associée à la base $(v_i)_{1 \le i \le r}$ de V;

(3) Σ l'ensemble des s indices de l'intervalle $[1, \binom{r+d'-1}{d'}]$ tels que V_j', $j \in \Sigma$, vérifient la proposition 4.6 relative à f^* et $\overline{\Sigma}$ le complémentaire.

Une forme $f : S^{d+d'}V \to \mathbf{k}$ est évidemment déterminée par les valeurs $f(V_{j'}' V_j)$ pour j' (resp. j) parcourant $[1, \binom{r+d'-1}{d'}]$ (resp. $[1, \binom{r+d-1}{d}]$). On remarque que ces scalaires sont connus dès que les formes $\langle V_{j'}' f^* \rangle$: $S^dV \to \mathbf{k}$ le sont pour tous les j' puisque

$$\langle V_{j'}', f^* \rangle (V_j) = f(V_{j'}' V_j). \tag{8}$$

Or d'après la proposition 4.6, il existe des scalaires $\lambda_{i'j'}$, $i' \in \overline{\Sigma}$, $j' \in \Sigma$ tels que

$$\langle V_{i'}', f^* \rangle = \sum_{j' \in \Sigma} \lambda_{i'j'} \langle V_{j'}', f^* \rangle. \tag{9}$$

Au vu de (8) et (9), on déduit aisément que si l'on connaît les $\lambda_{i'j'}$, $i' \in \overline{\Sigma}, j' \in \Sigma$ et les $f(v_{i_1} \cdots v_{i_{d+d'}})$ pour tous les $v_{i_1} \cdots v_{i_{d+d'}}$ divisibles par aucun monôme de $\overline{\Sigma}$, les autres composantes de f sont fonctions algébriques de ces paramètres.

Pour majorer dim $\mathscr{I}(s)$ il suffit donc de

(1) donner un majorant $A(s)$ du nombre d'éléments basiques de $S^{d+d'}V$ divisibles par aucun élément de $\overline{\Sigma}$, i.e., minorer le nombre d'éléments basiques de $S^{d+d'}V$ divisibles par un élément de $\overline{\Sigma}$ au moins (la somme de ces deux nombres est évidemment $\binom{r+d+d'-1}{d+d'}$);

(2) majorer le nombre $B(s)$ de $\lambda_{i'j'}, i' \in \overline{\Sigma}, j' \in \Sigma$, indépendants (algébriquement, en fait linéairement).

Un décompte immédiat fournit $B(s) = s[\binom{r+d'-1}{d'} - s]$.
Le théorème 4.5 donne: $A(s) = R_{d,d'}(s)$. ∎

Vu la proposition 4.6 l'inéquation fondamentale (6) s'écrit donc

$$R_{d,d'}(s) + \left[\binom{r+d'-1}{d'} - s\right]s + \left[\binom{r+d-1}{d} - s\right]n \le n\binom{r+d-1}{d}. \tag{10}$$

5. DISCUSSION DE L'INÉQUATION FONDAMENTALE

L'inéquation (10) est trivialement vérifiée pour $s = 0$. Pour $s \neq 0$, compte tenu de l'hypothèse $n\binom{r+d'-1}{d'} \ge \binom{r+d'+d-1}{d'+d}$, elle est vérifiée dès que

$$\frac{\binom{r+d'+d-1}{d'+d}}{\binom{r+d'-1}{d'}} - \binom{r+d'-1}{d'} \ge \frac{R(s)}{s} - s. \tag{11}$$

Remarque. On calcule immédiatement $R(1) = 1$. Dans ce cas l'inéquation (11) devient

$$\binom{r+d+d'-1}{d+d'} \ge \binom{r+d'-1}{d'}^2. \tag{12}$$

C'est donc une condition nécessaire pour que (11) soit vraie. On va la discuter en premier, car en fait le cas général ne diffère pas essentiellement de ce cas particulier.

LEMME 5.8. *L'équation* (12) *est vérifiée dès que*

$$d \geq \delta(r-1, d') \equiv 2d' \frac{r-1}{\sqrt[r-1]{(r-1)!}} - d' + \frac{(d')^2}{\sqrt[r-1]{(r-1)!}} + \frac{(r-1)^2}{\sqrt[r-1]{r-1!}} - (r-1). \tag{13}$$

Démonstration. Posons $p = d + d'$, $p' = d'$, et $q = r - 1$. Il s'agit de trouver une condition sur p, p', q telle que

$$\binom{p+q}{q} \geq \binom{p'+q}{q}^2. \tag{14}$$

On constate immédiatement que si $p + q \geq (p' + q)^2/\sqrt[q]{q!}$, alors pour tout entier $a < q : p + q - a \geq (p' + q - a)^2/\sqrt[q]{q!}$, ce qui donne (13). ∎

Nous allons maintenant traiter le cas général en nous inspirant de la méthode utilisée par [11]. On remarque d'abord que l'inéquation (11) signifie que la fonction $R(s)/s - s$ est majorée par sa valeur en $\binom{r+d'-1}{d'}$. Si la coreprésentation de Macaulay de s est donne par le d'-uplet $(\rho_1, \dots, \rho_{d'})$, rappelons-le en notant $s \equiv s(\rho_1, \dots, \rho_{d'})$ et notons $\pi(\rho_1, \dots, \rho_{d'}) = R(s)/s$ où l'on pose par convention $\pi(\underbrace{0, \dots, 0}_{d'}) = 1$. Le lemme suivant précise les maximums relatifs de π.

LEMME 5.9. *Soit k un entier compris entre* 0 *et d' et soit un entier $\mu \leq \rho_{k+1}$ (par convention $\rho_{d'+1} = r - 1$). Alors*

$$\max_{\rho_1 \leq \cdots \leq \rho_k \leq \mu} \pi = \max_{0 \leq j \leq k} \pi\Big(\underbrace{0, \dots, 0}_{j}, \underbrace{\mu, \dots, \mu}_{k-j}, \rho_{k+1}, \dots, \rho_{d'}\Big). \tag{15}$$

Démonstration. On fait une récurrence sur k.

Le pas $k = 0$ est trivial.

Fixons j et k et notons s_ρ l'entier associé à $(\underbrace{0, \dots, 0}_{j}, \underbrace{\rho, \dots, \rho}_{k-j}, \rho_{k+1}, \dots, \rho_{d'})$. On veut étudier la variation de $R(s_\rho)/s_\rho$, autrement dit $R(s_{\rho+1})/s_{\rho+1} - R(s_\rho)/s_\rho$.

La variation de $R(s_\rho)/s_\rho$ est décrite par le lemme suivant dont la démonstration, suite de calculs fastidieux, est reportée à la section 6.

LEMME 5.10. *$R(s_{\rho+1})/s_{\rho+1} - R(s_\rho)/s_\rho$ est le produit d'une fonction positive par une fonction croissante en ρ.*

En admettant que 5.9 est vrai jusqu'en $k-1, k \geq 1$, on peut écrire

$$\max_{\rho_1 \leq \cdots \leq \rho_k \leq \mu} \pi = \max_{\rho_k \leq \mu} \max_{0 \leq j \leq k-1} \pi\Big(\underbrace{0,\dots,0}_{j}, \underbrace{\rho_k,\dots,\rho_k}_{\substack{-1-j \\ kmu10}}, \rho_k, \dots, \rho_{d'}\Big) \tag{16}$$

$$= \max_{0 \leq j \leq k} \pi\Big(\underbrace{0,\dots,0}_{j}, \underbrace{\mu,\dots,\mu}_{k-j}, \rho_{k+1}, \dots, \rho_{d'}\Big) \tag{17}$$

puisque le lemme montre que le rapport $\pi = R(s_\rho)/s_\rho$ décroît, puis croît quand ρ croît (une des deux phases pouvant être absente); et l'égalité (17) signifie que le lemme 5.9 est vrai pour k.

Remarque. Dans le passage de (16) à (17), le cas $k = d'$ nécessite un peu d'attention; le domaine de variation de s commence à $s = 1$, soit en coreprésentation de Macaulay $s = (\underbrace{0,\dots,0}_{d'-1}, 1)$ et il faut lire $\pi(\underbrace{0,\dots,0}_{d'-1}, 1)$ au lieu de $\pi(\underbrace{0,\dots,0}_{d'})$. D'où le choix de la convention telle que $\pi(\underbrace{0,\dots,0}_{d'}) = \pi(\underbrace{0,\dots,0}_{d'-1}, 1)$. D'autre part $\pi(\rho_1, \dots, \rho_{d'})$ est constant tant que $\rho_{d'} \leq 1$. ∎

Nous sommes maintenant en mesure de produire une forme simplifiée de l'inéquation fondamentale.

L'inéquation fondamentale (11) est vérifiée dès que pour tout entier k, avec $0 \leq k \leq d'$

$$\frac{\binom{r+d+d'-1}{d+d'}}{\binom{r+d'-1}{d'}} - \max_{\rho_1 \leq \cdots \leq \rho_k \leq r-2} \frac{R\Big(s\big(\rho_1, \dots, \rho_k, \underbrace{r-1, \dots, r-1}_{d'-k}\big)\Big)}{s\big(\rho_1, \dots, \rho_k, \underbrace{r-1, \dots, r-1}_{d'-k}\big)}$$

$$\geq \binom{r+d'-1}{d'} - \min_{\rho_1 \leq \cdots \leq \rho_k \leq r-2} s\big(\rho_1, \dots, \rho_k, \underbrace{r-1, \dots, r-1}_{d'-k}\big), \tag{18}$$

ou, plus explictement, en tenant compte du lemme 5.9

$$\frac{\binom{r+d+d'-1}{d+d'}}{\binom{r+d'-1}{d'}} - \max_{0\leq j\leq k} \frac{\binom{r+d'+d-1}{d'+d} - \binom{r+k+d-1}{k+d} + \binom{r-1+k+d-1}{k+d} - \binom{r-1+j+d-1}{j+d}}{\binom{r+d'-1}{d'} - \binom{r+k-1}{k} + \binom{r-1+k-1}{k} - \binom{r-1+j-1}{j}} \tag{19}$$
$$\geq \binom{r+k-1}{k}.$$

Nous allons d'abord majorer le maximum intervenant dans (19) grâce au lemme suivant.

LEMME 5.11. *Pour tout $0 \leq j \leq k$, l'inéquation suivante est vérifiée*

$$\frac{\binom{r+d'+d-1}{d'+d} - \binom{r+k+d-1}{k+d} + \binom{r-1+k+d-1}{k+d}}{\binom{r+d'-1}{d'} - \binom{r+k-1}{k} + \binom{r-1+k-1}{k}} - \frac{\binom{r+d'+d-1}{d'+d} - \binom{r+k+d-1}{k+d} + \binom{r-1+k+d-1}{k+d} - \binom{r-1+j+d-1}{j+d}}{\binom{r+d'-1}{d'} - \binom{r+k-1}{k} + \binom{r-1+k-1}{k} - \binom{r-1+j-1}{j}} \geq 0. \tag{20}$$

Démonstration. En réduisant (20) au même dénominateur, il s'agit de montrer

$$-\binom{r-2+j}{j}\left[\binom{r+d'+d-1}{d'+d} - \binom{r+k+d-1}{k+d} + \binom{r-1+k+d-1}{k+d}\right]$$

$$+\binom{r-2+j+d}{j+d}\left[\binom{r+d'-1}{d'}-\binom{r+k-1}{k}\right]$$
$$\left.+\binom{r-1+k-1}{k}\right]\geq 0$$

ou

$$-\binom{r-2+j}{j}\sum_{l=k}^{d'}\binom{r-2+l+d}{l+d}$$
$$+\binom{r-2+j+d}{j+d}\sum_{l=k}^{d'}\binom{r-2+l}{l}\geq 0$$

ce qui résulte de la scholie suivante. ▮

SCHOLIE 5.12. *Dès que $l \geq j$,*

$$x(r-2,l,j,d)\equiv\binom{r-2+j+d}{j+d}\binom{r-2+l}{l}$$
$$-\binom{r-2+l+d}{l+d}\binom{r-2+j}{j}\geq 0.$$

Démonstration. En effet

$$x(r-2,l,j,1)=\frac{(r-2)(l-j)}{(l+1)(j+1)}\binom{r-2+j}{j}\binom{r-2+l}{l}\geq 0$$

et $x(r-2,l,j,d)$ est croissant en d dès que $l<j$ car $(r-2)/(j+d)+1\geq(r-2)/(l+d)+1\geq 1$. ▮

L'inéquation (19) est donc vraie dès que

$$\frac{\binom{r+d'+d-1}{d'+d}}{\binom{r+d'-1}{d'}}-\frac{\binom{r+d'+d-1}{d'+d}-\binom{r-2+k+d}{k-1+d}}{\binom{r+d'-1}{d'}-\binom{r-2+k}{k-1}} \tag{21}$$
$$\geq\binom{r+k-1}{k}.$$

Nous pouvons maintenant conclure.

LEMME 5.13. *Dès que* $d \geq \delta'(d', r-1)$ *et* $r \geq 4$, *l'inéquation* (21) *est vérifiée pour tout* $0 \leq k \leq d'$.

Démonstration. En multipliant (21) par

$$\frac{\binom{r+d'-1}{d'} - \binom{r-2+k}{k-1}}{\binom{r-2+k}{k-1}}$$

on est conduit à montrer

$$-\frac{(r+d+d'-1)\cdots(r+d')}{(d+d')\cdots(d'+1)} + \underbrace{\frac{(r-2+k+d)\cdots(r-1+k)}{(k-1+d)\cdots k} - \frac{r+k-1}{k}\binom{r+d'-1}{d'} + \binom{r+k-1}{k}}_{*} \geq 0. \tag{22}$$

On veut montrer que le terme noté $*$ est décroissant en k; comme $(r+k-1)/k$ l'est il suffit de montrer que $g(k) \equiv (r-2+k+d)\cdots(r+k)/(k-1+d)\cdots(k+1) + \binom{r+k-2}{k-1}$ est décroissant avec k. En effet

$$\begin{aligned} G(k) &\equiv g(k) - g(k-1) \\ &= -\frac{(r-1)(d-1)}{(k-1+d)k}\,\frac{(r-3+k+d)\cdots(r+k)}{(k-2+d)\cdots(k+1)} \\ &\quad + \binom{r+k-3}{k-1}. \end{aligned}$$

Il est aisé de voir que $G(k)$ est croissant en k.

Le lemme 5.8 montre que $G(d'+1) \leq 0$ dès que $d \geq \delta(r-2, d')$ et $d \geq d'((2r-1)/(r-1)) + (d')^2/(r-1) + r + 1$. Si on rappelle que $d \geq \delta(r-1, d')$ ces trois inéquations sont vérifiées dès que $d \geq \delta'(r-1, d')$ et $r \geq 4$. Le membre de gauche de (22) est donc décroissant en k pour $0 \leq k \leq d'+1$; or il est évidemment nul pour $k = d'+1$, ce qui démontre le lemme. ∎

6. DÉMONSTRATION DU LEMME 5.10

Introduisons d'abord les notations

$$s_\rho = s_0 + \binom{\rho + k}{k} - \binom{\rho + j}{j}$$

$$R(s_\rho) = R(s_0) + \binom{\rho + k + d}{k + d} - \binom{\rho + j + d}{j + d}.$$

Après avoir posé $a_{k,j}(\rho) = \binom{\rho + k}{k} - \binom{\rho + j}{j}$, on calcule

$$s_{\rho+1}s_\rho\left(\frac{R(s_{\rho+1})}{s_{\rho+1}}\ \frac{R(s_\rho)}{s_\rho}\right)$$

$$= \alpha_{k-1,j-1}(\rho + 1)\left(s_0\frac{a_{k+d-1,j+d-1}(\rho + 1)}{a_{k-1,j-1}(\rho + 1)} - R(s_0)\right.$$

$$\left. + \frac{b_{k,j}(\rho + 1)}{a_{k-1,j-1}(\rho + 1)}\right), \quad (23)$$

où l'on a posé $b_{k,j}(\rho + 1) = a_{k,j}(\rho)a_{k+d-1,j+d-1}(\rho + 1) - a_{k+d,j+d}(\rho)a_{k-1,j-1}(\rho + 1)$.

Pour la commodité du lecteur on explicite le calcul, où l'on a fait usage intensif de la seule égalité combinatoire $\binom{p+q+1}{q+1} = \binom{p+q}{q} + \binom{p+q}{q+1}$:

$$s_{\rho+1}s_\rho\left(\frac{R(s_{\rho+1})}{s_{\rho+1}} - \frac{R(s_\rho)}{s_\rho}\right)$$

$$= s_\rho R(s_{\rho+1}) - s_{\rho+1}R(s_\rho)$$

$$= \left[s_0 + \binom{\rho + k}{k} - \binom{\rho + j}{j}\right]$$

$$\times\left[R(s_0) + \binom{\rho + 1 + k + d}{k + d} - \binom{\rho + 1 + j + d}{j + d}\right]$$

$$-\left[s_0 + \binom{\rho + 1 + k}{k} - \binom{\rho + 1 + j}{j}\right]$$

$$\times\left[R(s_0) + \binom{\rho + k + d}{k + d} - \binom{\rho + j + d}{j + d}\right]$$

$$= s_0\left[\binom{\rho+k+d}{k+d-1} - \binom{\rho+j+d}{j+d-1}\right] - R(s_0)\left[\binom{\rho+k}{k-1} - \binom{\rho+j}{j-1}\right]$$
$$+\left[\binom{\rho+k}{k} - \binom{\rho+j}{j}\right]\left[\binom{\rho+k+d}{k+d} - \binom{\rho+j+d}{j+d}\right]$$
$$-\left[\binom{\rho+k}{k-1} - \binom{\rho+j}{j-1}\right]\left[\binom{\rho+k+d}{k+d} - \binom{\rho+j+d}{j+d}\right].$$

Le lemme 5.10 résulte alors de l'équation (23) et des deux sous-lemmes suivants.

SOUS-LEMME 6.14.

$$\frac{a_{k+d-1,j+d-1}(\rho+1)}{a_{k-1,j-1}(\rho+1)} = \frac{\binom{\rho+k+d}{k+d-1} - \binom{\rho+j+d}{j+d-1}}{\binom{\rho+k}{k-1} - \binom{\rho+j}{j-1}}$$

est une fonction croissante de ρ.

Démonstration. Il faut montrer que la quantité suivante est positive (ou nulle):

$$c(\rho) = a_{k+d-1,j+d-1}(\rho+1)a_{k-1,j-1}(\rho)$$
$$-a_{k+d-1,j+d-1}(\rho)a_{k-1,j-1}(\rho+1)$$
$$\times\left[\binom{\rho+k+d}{k+d-1} - \binom{\rho+j+d}{j+d-1}\right]\left[\binom{\rho-1+k}{k-1} - \binom{\rho-1+j}{j-1}\right]$$
$$-\left[\binom{\rho+1+k+d}{k+d-1} - \binom{\rho-1+j+d}{j+d-1}\right]\left[\binom{\rho+k}{k-1} - \binom{\rho+j}{j-1}\right]$$
$$= \left[\frac{\rho+k+d}{\rho+1}\binom{\rho-1+k+d}{k+d-1} - \frac{\rho+j+d}{\rho+1}\binom{\rho-1+j+d}{j+d-1}\right]$$
$$\times\left[\frac{k}{\rho+k}\binom{\rho+k}{k} - \frac{j}{\rho+j}\binom{\rho+j}{j}\right]$$
$$-\left[\binom{\rho-1+k+d}{k+d-1} - \binom{\rho-1+j+d}{j+d-1}\right]$$
$$\times\left[\frac{k}{\rho+1}\binom{\rho+k}{k} - \frac{j}{\rho+1}\binom{\rho+j}{j}\right].$$

D'où en multipliant par $(\rho+1)(\rho+k)(\rho+j)$

$$
\begin{aligned}
&(\rho+1)(\rho+k)(\rho+j)c(\rho)\\
&=\binom{\rho-1+k+d}{k+d-1}\binom{\rho+k}{k}\Big[\underbrace{k(\rho+k+d)(\rho+j)-k(\rho+j)(\rho+k)}_{=kd(\rho+j)}\Big]\\
&+\binom{\rho-1+j+d}{j+d-1}\binom{\rho+j}{j}\Big[\underbrace{j(\rho+j+d)(\rho+k)-j(\rho+k)(\rho+j)}_{=jd(\rho+k)}\Big]\\
&+\binom{\rho-1+k+d}{k+d-1}\binom{\rho+j}{j}\Big[\underbrace{-j(\rho+k+d)(\rho+k)+j(\rho+k)(\rho+j)}_{=j(-d-k+j)(\rho+k)}\Big]\\
&+\binom{\rho-1+j+d}{j+d-1}\binom{\rho+k}{k}\Big[\underbrace{-k(\rho+j+d)(\rho+j)+k(\rho+j)(\rho+k)}_{=k(-d-j+k)(\rho+j)}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\underbrace{dkj\left[\binom{\rho-1+k+d}{k+d-1}-\binom{\rho-1+j+d}{j+d-1}\right]\left[\binom{\rho+k}{k}-\binom{\rho+j}{j}\right]}_{1}\\
&\quad+\underbrace{d\rho\left[\binom{\rho-1+k+d}{k+d-1}-\binom{\rho-1+j+d}{j+d-1}\right]\left[k\binom{\rho+k}{k}-j\binom{\rho+j}{j}\right]}_{2} \qquad (24)\\
&\quad+\underbrace{\binom{\rho-1+k+d}{k+d-1}\binom{\rho+j}{j}j(j-k)(\rho+k)+\binom{\rho-1+j+d}{j+d-1}\binom{\rho+k}{k}k(k-j)(\rho+j)}_{3}.
\end{aligned}
$$

Dans la formule ci-dessus les termes notés 1 et 2 sont d'évidence positifs; examinons le terme noté 3.

La scholie 5.12 montre que

$$\binom{\rho-1+j+d}{j+d-1}\binom{\rho+k}{k}-\binom{\rho-1+k+d}{k+d-1}\binom{\rho+j}{j}\geq 0$$

dès que $k\geq j$.

On en déduit immédiatement que le terme noté 3 est minoré par

$$\binom{\rho-1+k+d}{k+d-1}\binom{\rho+j}{k}\rho(k-j)^2$$

qui est positif.

Finalement $c(\rho)\geq 0$, ce qui prouve le sous-lemme. ▮

SOUS-LEMME 6.15. *$b_{k,j}(\rho+1)/a_{k-1,j-1}(\rho+1)$ est une fonction croissante de ρ.*

Démonstration. Il s'agit de montrer la positivité de

$$b_{k,j}(\rho+1)a_{k-1,j-1}(\rho) - b_{k,j}(\rho)a_{k-1,j-1}(\rho+1).$$

En explicitant les termes a et b un calcul facile montre que cette quantité est égale à $a_{k,j}(\rho)c(\rho)$ et est donc positive par le sous-lemme 6.14.

Ce qui démontre le sous-lemme et le lemme. ∎

7. DOMAINE DE NON-SURJECTIVITÉ

C'est le domaine $d' < d$ et

$$n\binom{r+d'-1}{d'} < \binom{r+d+d'-1}{d+d'}. \tag{25}$$

En reprenant les notations de la section 3, il s'agit de montrer que $F(d'):\mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V \to S^{d+d'}V$ (qui évidemment n'est pas surjectif) est en fait injectif, pour F en dehors d'un sous-schéma de $\mathscr{F}$ de codimension 1.

Il est équivalent de montrer que

$$\check{F}(d'): S^{d+d'}\check{V} \to (\check{\mathbf{k}})^n \otimes S^{d'}\check{V}$$

est surjective.

On reprend pour cela le raisonnememt utilisé en section 3. On se replace dans la situation de la section 3 grâce au lemme d'algèbre linéaire suivant dont la démonstration est immédiate.

LEMME 7.16. *Soit $F:\mathbf{k}^n \to S^dV$ une application linéaire, $\check{F}: S^d\check{V} \to \check{\mathbf{k}}^n$ l'application duale, $F(d'):\mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V \to S^{d+d'}V$ l'application associée à F et $\check{F}(d')$ sa duale. Le diagramme suivant est alors commutatif:*

$$\begin{tikzcd}
S^d\check{V} \otimes S^{d'}\check{V} \arrow[r, "\check{F}\otimes S^{d'}\check{V}"] \arrow[d, "\check{\pi}"'] & \check{\mathbf{k}} \otimes S^{d'}\check{V} \\
S^{d+d'}\check{V} \arrow[ur, "\check{F}(d')"'] &
\end{tikzcd}$$

Le problème est donc ramené à l'étude des applications linéaires $F : S^dV \to \mathbf{k}^n$ telles que $\overline{F(d')}$défini par

$$\begin{array}{ccc} S^dV \otimes S^{d'}V & \xrightarrow{F\otimes S^{d'}V} & \mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow_{\overline{F}(d')} & \\ S^{d+d'}V & & \end{array}$$

soit surjectif.

Comme à la section 3 étudier la surjectivité de $\overline{F(d')} : S^{d+d'}V \to \mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V$, c'est étudier les formes linéaires non-nulles $f : \mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V \to \mathbf{k}$ telles que $f \circ F(d') = 0$. On "transfère" à l'étude des morphismes linéaires associés $f^* : \mathbf{k}^n \to S^{d'}\check{V}$, où f^* est défini par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k}^n & \xrightarrow{f^*} & S^{d'}\check{V} \\ {\scriptstyle\mathbf{k}^n\otimes j}\downarrow & \nearrow_{f\otimes S^{d'}\check{V}} & \\ \mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V \otimes S^{d'}\check{V} & & \end{array}$$

Let même raisonnement qu'au paragraphe 6 donne

Proposition 7.17. *Dans l'espace affine* $\mathrm{Hom}(\mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V, \mathbf{k})$ *le sous-schéma des formes de *-rang égal à s est de dimension au plus égale à*

$$s\left[\binom{r+d'-1}{d'} - s\right] + sn.$$

Pour la commodité du lecteur on reprend le raisonnement de la section 3.

Soit le sous-schéma $\mathcal{S} \subset \mathcal{F} = \mathrm{Hom}(\mathbf{k}^n, S^dV)$ des formes F tels que $\overline{F(d')}$ ait un conoyau non trivial.

On va montrer que

$$\dim \mathcal{S} \leq \dim \mathcal{F} - 1 = n\binom{r+d-1}{d} - 1.$$

Pour cela on considère le schéma $\mathcal{T}$ des couples (F, f) où f est une forme différentielle non-nulle $\mathbf{k}^n \otimes S^{d'}V \to \mathbf{k}$ telle que $f \circ \overline{F(d')} = 0$.

Examinons la projection $\mathcal{T} \to \mathcal{S}$; la fibre est stable par homothétie; il suffit donc de montrer que $\dim \mathcal{T} \leq \binom{r+d-1}{d}$.

Soit maintenant le schéma $\mathcal{T}^*$ formé des couples (F, f) où f^* associée à f vérifie: $f^* \circ F = 0$. Comme $\mathcal{T}$ est un sous-schéma de $\mathcal{T}$, il suffit de montrer que $\dim \mathcal{T}^* \leq n\binom{r+d-1}{d}$.

Définissons la strate $\mathscr{I}(s) \subset \mathscr{I}$ par les couples (F, f) de $\mathscr{I}^*$ avec rg $f^* = s$. Examinons la projection $\mathscr{I}(s) \to \mathscr{J}(s)$ où $\mathscr{J}(s)$ est le schéma des formes $f: k^n \otimes S^{d'}V \to \mathbf{k}$ telles que $f^* \circ F = 0$, f^* de rang s. La fibre correspondante est de dimension $\binom{r+d-1}{d}(n-s)$.

D'après la proposition 7.17 $\mathscr{J}(s)$ a une dimension au plus égale à $s[\binom{r+d'-1}{d'} - s] + sn$.

La discussion précédente nous fournit alors l'inégalité fondamentale

$$\dim \mathscr{I} \leq \max_s \left(\binom{r+d-1}{d}(n-s) + s\left[\binom{r+d'-1}{d'} - s\right] + sn \right)$$

$$\leq n\binom{r+d-1}{d} = \dim \mathscr{F} \tag{26}$$

sachant que

$$n\binom{r+d'-1}{d'} < \binom{r+d+d'-1}{d+d'}. \tag{27}$$

L'inéquation (26) est triviale si $s = 0$. Si $s \geq 1$, et tenant compte de (27), elle est induite par

$$\binom{r+d-1}{d}\binom{r+d'-1}{d'} - \left[\binom{r+d'-1}{d'} - s\right]\binom{r+d'-1}{d'}$$

$$-\binom{r+d+d'-1}{d+d'} \geq 0. \tag{28}$$

Il suffit donc de montrer (faire $s = 1$ dans (28))

LEMME 7.18. *L'inégalité suivante a lieu dès que* $1 \leq d' < d$ *et* $r \geq 2$

$$\binom{r+d-1}{d}\binom{r+d'-1}{d'} - \left[\binom{r+d'-1}{d'} - 1\right]\binom{r+d'-1}{d'}$$

$$-\binom{r+d+d'-1}{d+d'} \geq 0. \tag{29}$$

Démonstration. Posons $d = d' + \delta$ avec $\delta \geq 1$. L'inégalité (29) s'écrit

$$\frac{(r+d'+\delta-1)\cdots r}{(d'+\delta)!}\frac{(r+d'-1)\cdots r}{d'!}$$

$$-\frac{(r+d'-1)\cdots r}{d'!}\frac{(r+d'-1)\cdots r}{d'!}$$

$$+\frac{(r+d'-1)\cdots r}{d'!} - \frac{(r+2d'+\delta-1)\cdots r}{(2d'+\delta)!} \geq 0. \tag{30}$$

Supposons l'inégalité (30) vraie pour d' et $\delta = 1$. On récurre sur δ. Le membre de droite est croissant en δ (utiliser $(r + d' + \delta)/(d' + \delta + 1) \geq 1$ et $((r + d' - \delta)(2d' + \delta + 1))/((d' + \delta + 1)(r + 2d' + \delta)) \geq 1$).

Montrons (30) pour $\delta = 1$, i.e.,

$$\frac{(r + d' - 1)\cdots r}{d'!}\left[\frac{(r + d' - 1)\cdots(r - 1)}{(d' + 1)!} + 1\right] - \frac{(r + 2d')\cdots r}{(2d' + 1)!} \geq 0. \tag{31}$$

On vérifie immédiatement (31) pour $r = 2$, d' quelconque et pour $d' = 1$, $r \geq 2$. Reste donc à examiner le domaine $d' \geq 2$ et $r \geq 3$.

L'inéquation (31) sera a fortiori vérifiée si

$$\frac{(r + d' - 1)\cdots r}{d'!}\,\frac{(r + d' - 1)\cdots(r - 1)}{(d' + 1)!} - \frac{(r + 2d')\cdots r}{(2d' + 1)!} \geq 0. \tag{32}$$

Montrons-le par récurrence sur d'. Pour $d' = 2$ le premier membre de (32) est égal à $(3(r + 1)r/5!)(3r^3 - 3r^2 - 12r - 8)$ qui est positif dès que $r \geq 3$. Le membre de droite est croissant en d' (utiliser $(r + d')^2/((d' + 1)(d' + 2)) \geq 1$ et $(r + d')^2(2d' + 3)(2d' + 2)/((d' + 1)(d' + 2)(r + 2d' + 2)(r + 2d' + 1)) \geq 1$, qui est vérifiée dès que $r \geq 2$). ∎

8. APPENDICE

Pour trouver un majorant de la dimension de $\mathscr{J}(s)$ [11] utilise une autre méthode que [4]. Cependant elle ne conduit pas à une majoration différente. Reprenons rapidement le raisonnement fait dans [11] et [3]. Considérons le schéma suivant:

$$\mathscr{K}(s) = \{(f, W) \in \mathscr{J}(s) \times G_s^{d'}(V); \operatorname{Im} f^* \subset W\},$$

où $G_s^{d'}(V)$ désigne la grassmannienne des sous-espaces de dimension s de $S^{d'}\check{V}$.

Soit π la projection de $\mathscr{J}(s)$ sur $G_s^{d'}(V)$. La dimension de $\pi^{-1}(W)$ est une fonction semi-continue supérieurement sur $G_s^{d'}(V)$, constante sur les orbites de tout sous-groupe de Borel de $Gl(V)$ (qui agit naturellement sur $S^{d'}\check{V}$, donc sur $G_s^{d'}(V)$).

Fixons un tel sous-groupe de Borel B, et une base $(e_1, \ldots, e_r)$ qui le triangularise. D'après le théorème du point fixe de Borel [2], le maximum de la fonction $\dim \pi^{-1}(W)$ est alors atteint sur un point fixe de B, autrement dit sur un B-sous-module I de $S^{d'}\check{V}$ de dimension s. Or un tel B-module admet une base naturelle de tenseurs décomposables $\epsilon_{i_1} \ldots \epsilon_{i_{d'}}$,

$i_1 \leq \cdots \leq i_{d'}$ où $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r)$ est la base de $\check{V}$ duale de la base donnée de V.

On appellera $R'(I)$ la dimension d'un tel B-sous-module et $R'(s)$ le maximum atteint par $R'(I)$ quand I décrit l'ensemble des B-sous-modules de dimension s de $S^{d'}\check{V}$. Alors

$$\begin{aligned}\dim(\mathscr{I}(s)) &\leq R'(s) + \dim(G_s^{d'}V) = R'(s) + \left[\binom{r+d'-1}{d'} - s\right]s \\ &= M(s). \end{aligned} \tag{33}$$

L'équation (3) devient

$$R'(s) + \left[\binom{r+d'-1}{d'} - s\right]s + \left[\binom{r+d-1}{d} - s\right]n \leq n\binom{r+d-1}{d}. \tag{34}$$

Calculons maintenant $R'(I)$ et $R'(s)$. Rappelons d'abord le lemme montré par [11].

LEMME 8.19. *Un B-sous-module I de $S^{d'}\check{V}$ est engendré, comme espace vectoriel, par une famille (notée aussi I par abus de langage) de tenseurs $\epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_{d'}}$, $1 \leq \cdots \leq i_{d'} \leq r$, "stable par réduction," c'est-à-dire telle que:*

$$\epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_{d'}} \in I \Rightarrow \forall k, \epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_{k-1}} \epsilon_{i_k - 1} \epsilon_{i_{k+1}} \cdots \epsilon_{i_{d'}} \in I.$$

On montre alors:

LEMME 8.20. *Si I est un B-sous-module de $S^{d'}\check{V}$ de dimension s:*

$$R'(I) \equiv \dim \pi^{-1}(I) = \sum_{\epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_{d'}} \in I} \binom{i_1 + d' - 1}{d'}.$$

Démonstration. En effet, soit $f \in (S^{d+d'}V)^{\vee}$. Dans la base fixée de V, f est représentée par un matrice symétrique $(f_{j_1 j_2 \cdots j_{d+d'}})_{1 \leq j_1, j_2, \ldots, j_{d+d'} \leq r}$. Alors $f \in \pi^{-1}(I)$ si et seulement si $f_{j_1 j_2 \cdots j_{d+d'}} = 0$ pour tout $d + d'$-uple tel qu'il existe un d-uple ordonné $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_{d'}$ n'appartenant pas à I, où $(i_1, i_2, \ldots, i_{d'})$ est un sous-ensemble de $(j_1, j_2, \ldots, j_{d+d'})$.

En effet, par définition de f^*

$$f^*(\epsilon_{j_1} \cdots \epsilon_{j_d}) = \sum_{i_1 \leq \cdots \leq i_{d'}} f(\epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_{d'}} \epsilon_{j_1} \cdots \epsilon_{j_d}) e_{i_1} \cdots e_{i_{d'}}.$$

D'où si $\operatorname{Im} f^* \subset I$, le coefficient $f(\epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_{d'}} \epsilon_{j_1} \cdots \epsilon_{j_d})$ doit être nul chaque fois que $e_{i_1} \cdots e_{i_{d'}}$ n'appartient pas à I. Comme f est symétrique on en déduit la condition ci-dessus.

Réciproquement si la condition ci-dessus est vérifiée, l'écriture de $f^*(\epsilon_{j_1} \cdots \epsilon_{j_d})$ ne fait apparaître que des générateurs $e_{i_1} \cdots e_{i_{d'}}$ appartenant à I, donc $\operatorname{Im} f^* \subset I$.

D'où par le lemme 8.19

$$\dim \pi^{-1}(I) = \operatorname{card}\{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_{d+d'} \leq r; \text{avec } i_{d'+1} \cdots i_{d+d'} \in I\}.$$

Un décompte immédiat fournit:

$$\dim \pi^{-1}(I) = \sum_{\epsilon_{i_1} \cdots \epsilon_{i_{d'}} \in I} \binom{i_1 + d' - 1}{d'}. \quad \blacksquare$$

Soit maintenant $R'(s)$ le maximum atteint par l'entier $R'(I)$ quand I parcourt l'ensemble des B-sous-modules de dimension s de $S^{d'}\check{V}$. [11, Prop. 3.1] donne le résultat pour (dans nos notations) $d = 1$. Un raisonnement en tous points identiques fournit le cas général.

PROPOSITION 8.21

Tout entier $s \leq \binom{r + d' - 1}{d'}$ *admet une décomposition sous la forme*

$$s = \binom{\rho_{d'} + d' - 1}{d'} + \binom{\rho_{d'-1} + d' - 1 - 1}{d' - 1} + \cdots + \binom{\rho_1 + 1 - 1}{1}$$

unique si $0 \leq \rho_1 \leq \cdots \leq \rho_{d'-1} \leq \rho_{d'} \leq r - 1$, *avec la convention habituelle* $\binom{a}{b} = 0$ *si* $a < b$.

L'entier $R'(s)$ *est alors*

$$\begin{aligned} R'(s) &= \binom{\rho_{d'} + d' + d - 1}{d' + d} + \binom{\rho_{d'-1} + d' + d - 1 - 1}{d' + d - 1} + \cdots \\ &= R_{d,d'(s)} + \binom{\rho_1 + 1 + d - 1}{1 + d} \end{aligned}$$

Il est atteint par le B*-sous-module de* $S^{d'}\check{V}$ *engendré par la famille des tenseurs*

$$\epsilon^k_{\rho_k}\epsilon_{\rho_{k+1}+1} \cdots \epsilon_{\rho'_d+1}, \qquad 1 \leq \cdots \leq d'$$

(*dans laquelle on ne tiendra pas compte des termes faisant apparaître un* ϵ_0).

L'on voit ainsi que (34) ne diffère pas de (10).

REFERENCES

1. D. Anick, Thin algebras of embedding dimension three, *J. Algebra* **100** (1986), 235–259.
2. A. Borel, "Linear Algebraic Groups," Benjamin, Elmsford, New York, 1969.
3. A. Dolcetti, On the generation of certain bundles over $\mathbf{P}^3$, *Math. Ann.* **294** (1992), 99–107.
4. P. Ellia et A. Hirschowitz, Voie ouest. I. Génération de certains fibrés sur les espaces projectifs et applications, *J. Algebraic Geometry* **1** (1992), 531–547.
5. R. Fröberg, An inequality for Hilbert series of graded algebras, *Math. Scand.* **56** (1985), 117–144.
6. G. Gotzmann, Eine Bedingung für die Flachheit und das Hilbertpolynom eines graduierten Ringes, *Math. Z.* **158** (1978), 61–70.
7. M. Green, Restrictions of linear series to hyperplanes, and some results of Macaulay and Gotzmann, *in* "Algebraic Curves and Projective Geometry," pp. 76–86, Lecture Notes in Mathematics, Vol. **1389**, Springer-Verlag, Berlin/New York, 1989.
8. M. Hochster et D. Laksov, The linear syzygies of homogeneous forms, *Comm. Algebra* **15** (1987), 227–239.
9. A. Iarrobino, Punctual Hilbert schemes, *Mem. Amer. Math. Soc.* **188**, (1977), 1–112.
10. F. H. S. Macaulay, Some properties of enumeration in the theory of modular systems, *Proc. London Math. Soc.* (*3*) **26** (1927), 531–555.
11. L. Manivel, Des fibrés globalement engendrés sur l'espace projectif, *Math. Ann.* **301** (3), (1995), 469–484.
12. E. Sperner, Über einen kombinatorischen Satz von Macaulay und seine Anwendungen auf die Theorie der Polynomideale, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **7** (1930), 149–130.
13. F. Whipple, On a theorem due to F. S. Macaulay, *Proc. London Math. Soc.* (*3*) **28** (1928), 431–437.