

О точках ветвления в детерминистических и случайных пучках матриц

Борис Шапиро, совместно с К. Зарембо и М. Татером

January 23, 2022

Обсуждаемые задачи

- 1 О случайных матрицах
- 2 Простейшая проблема ветвления
- 3 Два примера квазиточно решаемых моделей
- 4 Множества ветвления для пучков случайных матриц
- 5 Статистика монодромии

ОСНОВНЫЕ ССЫЛКИ

- (i) B. Shapiro, M. Tater, On spectral asymptotics of quasi-exactly solvable sextic, *Exp. Math.* 28 (2019), no. 1, 16–23.
- (ii) B. Shapiro, M. Tater, On spectral asymptotics of quasi-exactly solvable quartic potential, *Analysis and Mathematical Physics* (2022) 12 (2022), no. 1, Paper No. 2.
- (iii) B. Shapiro, K. Zarembo, On level crossing in random matrix pencils. I. Random perturbation of a fixed matrix, *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, Volume 50(4).
- (iv) T. Grøsfjeld, B. Shapiro, K. Zarembo, On level crossing in random matrix pencils. II. Random perturbation of a random matrix, *J. Phys. A: Math. Theor* (2019). no 21.

Коротко о случайных матрицах

Случайные матрицы, т.е. матрицы, элементы которых являются случайными переменными, по видимому, впервые появились в работах Wishart-а в 1928 г. в связи с анализом данных в статистических приложениях. Через тридцать лет в 1955 г. они возникли в основополагающей работе Wigner-а при попытке построения статистических моделей, объясняющих спектры тяжелых ядер. В 60-е известные физики, такие как Wigner, Dyson, Mehta получили первые важные результаты про спектральные распределения случайных матриц. Эта тематика распространилась на другие области физики и математики, включая классический анализ, теорию чисел, перечислительную комбинаторику.

О случайных матрицах

Простейшая проблема ветвления

Два примера квазиточно решаемых моделей

Множества ветвления для пучков случайных матриц

Статистика монодромии

Продолжение

Возникли новые понятия, такие как детерминанты Фредгольма (60-е годы), диффузионные процессы (60-е годы), свободная вероятность (90-е годы).

Стали применяться теория интегрируемых систем, задача Римана - Гильберта и ряд других методов, требующих высокой математической квалификации.

В настоящее время есть несколько сотен математиков и физиков, активно развивающих теорию и приложения случайных матриц. Одной из наиболее заметных фигур является Terence Tao.

О случайных матрицах

Простейшая проблема ветвления

Два примера квазиточно решаемых моделей

Множества ветвления для пучков случайных матриц

Статистика монодромии

Основное отличие предлагаемой тематики от обычной

Обычно в теории случайных матриц изучается распределение собственных чисел (спектра) случайных матриц определенного вида (принадлежащих определенному случайному ансамблю). Ниже мы будем рассматривать пучки детерминистических и случайных матриц и изучать, при каких значениях параметра пучка, возникают кратные собственные числа (level crossings в физической терминологии) и связанные с этим явлениями вопросы.

Основная задача. Пусть A и B два линейных оператора с простым спектром. Рассмотрим пучок $A + tB$, где λ комплексный параметр.

- (i) Определить множество ветвления $LC \subset \mathbb{C}$, состоящее из всех значений λ , для которых у оператора $A + \lambda B$ имеется кратное собственное число;
- (ii) В случае, когда LC дискретно, определить спектральную монодромию пучка, т.е., какие перестановки собственных чисел возникают, когда параметр λ пробегает различные замкнутые петли в пространстве $\mathbb{C} \setminus LC$.

При такой постановке, в общем случае, задача является весьма сложной. Особенно вопрос о монодромии!

Одним из наиболее классических примеров таких задач является осциллятор четвертой степени

$$-y'' + (2z^4 + \beta z^2)y = \mu y,$$

с начальными условиями $y(\pm\infty) = 0$ на вещественной оси.
(Параметр пучка обозначен через β .)

Этот пример активно изучался практически с момента создания квантовой механики, например в работах Bender-Wu (1969), Simon (1970), Voros (1983), Shanley (1988), и т.д.

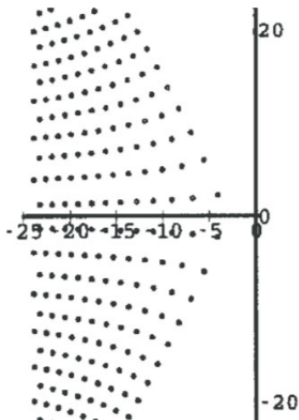


Figure: Численно полученная картина точек ветвления классического осциллятора четвертой степени, Shanley (1988).

Спектральная задача называется квазиточно решаемой, если конечная часть ее спектра может быть получена методами линейной алгебры, т.е., нахождение некоторой части спектра сводится к решению полиномиального уравнения от одной переменной некоторой степени. Исторически первым и наиболее известным примером квазиточно решаемых моделей в квантовой механике является квазиточно решаемая секстика. Она была введена в работе [Singh et al. 78] (см. также [Turbiner 88, Turbiner and Ushveridze 87, Ushveridze]). Она задается уравнением Шредингера

$$-y'' + \Pi(x)y' = \mu y,$$

с граничными условиями $y(\pm\infty) = 0$ на \mathbb{R} . Потенциал $\Pi(x)$ задается формулой

$$\Pi_{m,p,b}(x) = x^6 + 2bx^4 + (b^2 - (4m + 2p + 3))x^2,$$

где m положительное целое число, $p \in \{0, 1\}$, и $b \in \mathbb{C}$.

Было доказано, что для любого $b \in \mathbb{C}$, вышеуказанное уравнение имеет $m + 1$ собственных функций вида

$$\phi(x) = Q(x)e^{-\frac{x^4}{4} - \frac{bx^2}{2}},$$

где $Q(x)$ является четным (соотв. нечетным) многочленом степени $2m$ (соотв. $2m + 1$) для $p = 0$ (соотв. $p = 1$).

После некоторых непосредственных вычислений можно показать, что для $p = 0$, собственные числа, соответствующие вышеуказанным $m + 1$ собственным функциям, образуют спектр следующей $(m + 1) \times (m + 1)$ -матрицы

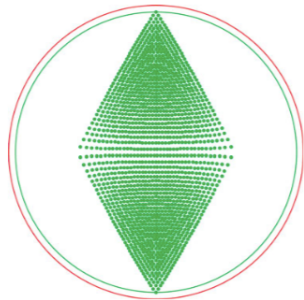
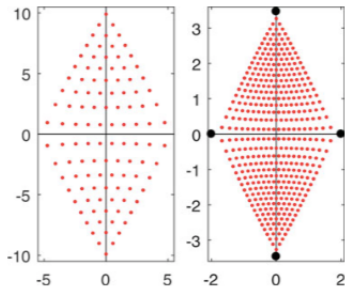
$$M_m(b) = \begin{pmatrix} b & -4m & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 \cdot 2 & 5b & 4 - 4m & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -3 \cdot 4 & 9b & 8 - 4m & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -5 \cdot 6 & 13b & 12 - 4m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Другими словами, нам нужно рассмотреть довольно простой матричный пучок $M_m(b) = A_m + bB_m$, где

$$A_m = \begin{pmatrix} 0 & -4m & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 \cdot 2 & 0 & 4 - 4m & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -3 \cdot 4 & 0 & 8 - 4m & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -5 \cdot 6 & 0 & 12 - 4m & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

и

$$B_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$



При всех вещественных b , спектр матрицы $M_m(b)$ вещественный и простой. С другой стороны, существуют $(m+1)m$ не вещественных значений b , при которых матрица $M_m(b)$ имеет кратное собственное значение. Вычислив дискриминант пучка и найдя численно его корни, мы получаем приведенную выше (отмасштабированную) картинку.

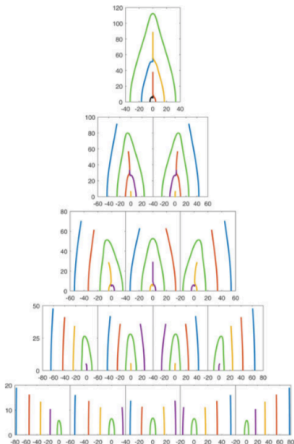


Figure: Численные результаты для монодромия при $m = 5$.

Основная гипотеза про монодромию.

Для данного m , точки ветвления в верхней полуплоскости естественное разбиваются на ряды из $m, m - 1, \dots, 1$ точки соответственно. Если каждой такой точке сопоставить путь, идущий с вещественной оси прямо под точкой вверх почти до точки, потом обходящий точку против часовой стрелки и потом назад до вещественной прямой, то возникает транспозиция двух собственных чисел, зависящих от номера ряда, в котором находится точка ветвления и номера точки ветвления в этом ряду. См. пример выше.

Оказывается, что можно аппроксимировать вышеуказанный потенциал четвертой степени последовательностью квазиточно решаемых потенциалов шестой степени. А именно, возьмем $n = 4m + 3$. Тогда вышеуказанная квазиточно решаемая секстика превращается в

$$-y''(z) + [a^2 z^6 + 2a\alpha z^4 + (\alpha^2 - a\lambda)z^2]y(z) = \mu y(z)$$

после перенормировки $x = a^{1/4}z$, $\alpha = a^{1/4}\lambda$, $\lambda = a^{1/2}\mu$. При этом имеем $b = \alpha/a^{1/2} = n^{1/2}(1 + (s - t/2)n^{-2/3} + O(n^{-4/3}))$, что дает потенциал вида

$$n^{-2/3}(1 + O(n^{-2/3}))z^6 + 2(1 + (s + t)n^{-2/3} + stn^{-4/3})z^4 + ((2s - t) + s^2n^{-2/3})z^2.$$

На следующем рисунке показано расположение точек ветвления для перенормированного потенциала шестой степени и для классического осциллятора четвертой степени.

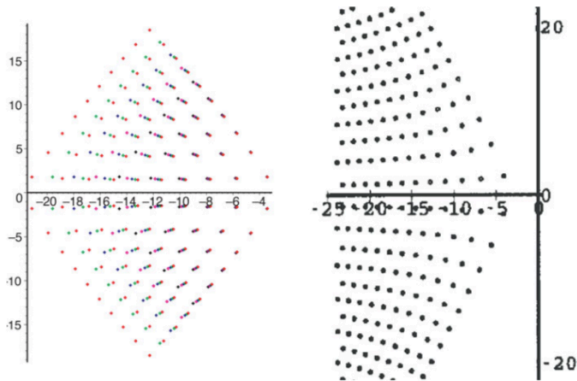


Figure: Точки ветвления для перенормированной квазиточно решаемой секстики при $m = 6, 7, 8, 9, 10$ и соответствующие точки ветвления для осциллятора четвертой степени. Левая последовательность сходится к правой картинке.

Другой хорошо известной точно решаемой моделью является осциллятор четвертой степени, обнаруженный Bender-ом и Voettcher-ом в 1998 г. В специальном случае он дается следующим уравнением типа Шредингера

$$L_J(y) = y'' - (x^4/4 - ax^2/2 - Jx)y = \mu y \quad (2)$$

с граничными условиями $y(te^{\pm\pi i/3}) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, где $a \in \mathbb{C}$ и J являются параметрами задачи.

Если $J = n + 1$ целое положительное число, тогда $L_{n+1}(y)$ отображает пространство квазимногочленов $\{pe^h : \deg p \leq n\}$ в себя, где p – многочлен степени не выше n и $h = -x^3/6 + ax/2$.

Следовательно, существуют $n + 1$ собственных функций вышеуказанного вида. Можно проверить, что собственные значения этих $n + 1$ собственных функций образуют спектр матрицы

$$M_n^{(a)} := \begin{pmatrix} 0 & a & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2a & 6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 3a & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & (n-1)a & n(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & na \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Если a является большим положительным числом, спектр матрицы $M_n(a)$ будет вещественным и простым.

Следовательно, нам нужно изучать пучок $M_n^{(a)} = A_n + aB_n$,

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ n & 0 & 0 & 6 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n-1 & 0 & 0 & 12 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 3 & 0 & 0 & n(n-1) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & (n-1) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

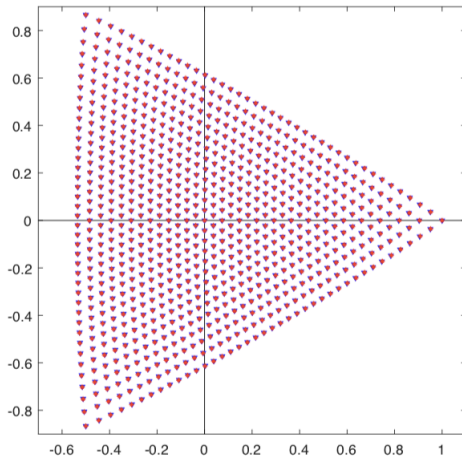


Figure: Точки ветвления пучка при $J = 40$.

Далее, напомним, что многочлены Яблонского - Воробьева определяются следующим образом. Set $YV_0 = 1$, $YV_1 = t$. Для $n \geq 1$, определим

$$YV_{n+1} = \frac{t \cdot YV_n^2 - 4(YV_n \cdot YV_n'' - (YV_n')^2)}{YV_{n-1}}$$

Хотя приведенное выражение априори определяет рациональную функцию, на самом деле YV_n является многочленом степени $\binom{n+1}{2}$. Важность многочленов Яблонского - Воробьева объясняется тем фактом, что все рациональные решения второго уравнения Пенлеве

$$u_{tt} = tu + 2u^3 + \alpha, \alpha \in \mathbb{C},$$

могут быть представлены в виде

$$u(t) = u(t; n) = \frac{d}{dt} \left\{ \ln \left[\frac{YV_{n-1}(t)}{YV_n(t)} \right] \right\}, u(t, 0) = 0, u(t; -n) := -u(t; n)$$

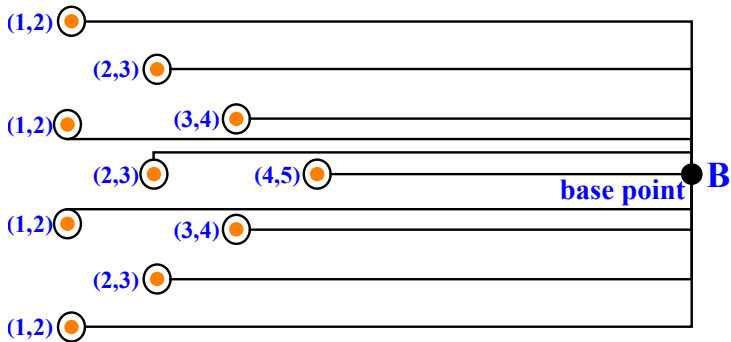
Обозначим через \mathcal{Z}_n множество нулей YV_n .

Замечание

Можно показать, что максимум модуля корней из Σ_n растет как $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}n^{2/3}$, в то время как максимум модуля корней из \mathcal{Z}_n растет как $\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{3}}n^{2/3}$.

Гипотеза

(i) После деления на $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}n^{2/3}$ и $\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{2}{3}}n^{2/3}$ соответственно, последовательность $\{\Sigma_n\}$ стремится к последовательности $\{\widehat{\mathcal{Z}}_n\}$, где $\widehat{\mathcal{Z}}_n$ множество нулей $YV_n(-t)$. В частности, предельные треугольные области \mathfrak{F} , заполняемые $\{\Sigma_n\}$ и $\{\widehat{\mathcal{Z}}_n\}$ после вышеуказанной ренормализации при $n \rightarrow \infty$ совпадают.

Figure: Монодромия при $J = 5$.

Начнем со случая комплексного Гауссова ансамбля. Напомним, что комплексным Гауссовым ансамблем $GE_n^{\mathbb{C}}$ называется распределение на пространстве $Mat_n^{\mathbb{C}}$ всех комплексно-значных $n \times n$ -матриц, где каждый элемент случайной $n \times n$ -матрицы является независимой комплексной переменной, распределенной согласно $N(0, \frac{1}{2}) + iN(0, \frac{1}{2})$.

Теорема

Для любого целого положительного числа n , если матрицы A и B независимо выбираются из $GE_n^{\mathbb{C}}$, то распределение точек ветвления пучка $A + \lambda B$ относительно аффинной координаты $\lambda = x + iy$ of \mathbb{C} задается выражением

$$\mathcal{P}_{GE_n^{\mathbb{C}}}(\lambda) := \mathcal{P}_{GE_n^{\mathbb{C}}}(x, y) dx dy = \frac{dx dy}{\pi(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{dx dy}{\pi(1 + |\lambda|^2)^2}. \quad (4)$$

Замечание

В полярных координатах (r, θ) на комплексной плоскости параметра λ , вышеуказанная плотность распределения $\mathcal{P}_{\text{GE}_n^{\mathbb{C}}}(\lambda)$ имеет вид

$$\mathcal{P}_{\text{GE}_n^{\mathbb{C}}}(r, \theta) dr d\psi = \frac{r dr d\theta}{\pi(1+r^2)^2},$$

что дает для радиальной функции распределения выражение

$$\Psi_{\text{GE}_n^{\mathbb{C}}}(r) = \frac{r^2}{1+r^2}.$$

Давайте реализуем комплексную проективную прямую $\mathbb{C}P^1 \simeq S^2$ как единичную сферу в \mathbb{R}^3 с координатами (X, Y, Z) , и отождествим комплексную плоскость параметра $\lambda = x + iy$ с горизонтальной координатной (X, Y) -плоскостью, где X соответствует вещественной, а Y соответствует мнимой оси в комплексной плоскости \mathbb{C} . Если мы применим стандартную стереографическую проекцию единичной сферы в \mathbb{R}^3 из ее северного полюса, т.е. из точки $(0, 0, 1)$ на (X, Y) -плоскость, тогда обычный элемент площади на сфере, индуцированный из стандартной Евклидовой структуры в \mathbb{R}^3 задается

$$dA = \frac{4dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{4dx dy}{(1 + |\lambda|^2)^2}.$$

Из этого факта вытекает, что правая часть (4) соответствует постоянной плотности $\frac{1}{4\pi}$ относительно стандартной Евклидовой площади на $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$, компактифицирующей комплексную плоскость параметра λ .

Альтернативный способ выразить этот факт состоит в следующем. Рассмотрим стандартную цилиндрическую систему координат (ρ, ϕ, Z) in \mathbb{R}^3 , где $\rho \geq 0$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $Z \in \mathbb{R}$. Напомним, что

$$X = \rho \cos \phi, \quad Y = \rho \sin \phi, \quad Z = Z.$$

Если мы рассмотрим (ϕ, Z) , $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $-1 \leq Z \leq 1$, как координаты на единичной сфере $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$ (с удаленными полюсами), тогда в этих координатах обычный элемент площади на сфере задается формулой

$$dA = d\phi dZ.$$

Значит, в цилиндрических координатах (ϕ, Z) , $0 \leq \phi \leq 2\pi$; $-1 \leq z \leq 1$, параметризующих единичную сферу S^2 , мера $\mathcal{P}_{\text{GE}_n^{\mathbb{C}}}(x, y) dx dy$, заданная (4), преобразуется в

$$\mathcal{P}_{\text{GE}_n^{\mathbb{C}}}(\phi, Z) d\phi dZ = \frac{d\phi dZ}{4\pi}. \quad (5)$$

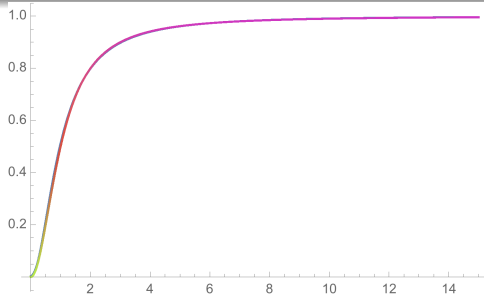


Figure: Радиальная плотность точек ветвления пучка $A + \lambda B$, где A и B независимо выбираются из ансамбля $GE_6^{\mathbb{C}}$; (использовано 100 случайных пар). Диаграмма дает отличное совпадение эмпирического распределения модуля точек ветвления, полученного в численном эксперименте, с теоретической радиальной плотностью $\frac{r^2}{1+r^2}$.

В действительности, мы можем доказать следующее обобщение Теоремы 1.

Предложение

Утверждение Теоремы 1 остается в силе, если независимо выбирать A and B из взвешенного комплексного Гауссова ансамбля $GE_{\sigma^2, n}^{\mathbb{C}}$, т.е. из ансамбля, внедиагональные элементы которого являются независимыми стандартными комплексными Гауссовыми независимыми переменными, а диагональные независимыми нормальными Гауссовыми переменными с произвольной положительной дисперсией σ^2 .

Более того, рассмотрим следующее действие группы SU_2 на $\text{Mat}_n^{\mathbb{C}} \times \text{Mat}_n^{\mathbb{C}}$. Матрица $\mathfrak{U} \in SU_2$, заданная $\begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$, $|u|^2 + |v|^2 = 1$, действует на этом произведении по правилу:

$$(A, B) * \mathfrak{U} \mapsto (uA + vB, -\bar{v}A + \bar{u}B). \quad (6)$$

Возьмем произвольное комплексное линейное подпространство $W_n \subset \text{Mat}_n^{\mathbb{C}}$ такое, что произведение $W_n \times W_n \subset \text{Mat}_n^{\mathbb{C}} \times \text{Mat}_n^{\mathbb{C}}$ сохраняется действием (6).

Фиксировав $\sigma > 0$, обозначим через $W_{\sigma^2, n}$ пространство W_n с мерой, индуцированной из скалярного комплексного Гауссова ансамбля $GE_{\sigma^2, n}^{\mathbb{C}}$.

Предложение

В предыдущих обозначениях, точки ветвления пучка $A + \lambda B$, где случайные матрицы A и B независимо выбираются из $W_{\sigma^2, n}$, равномерно распределены на $\mathbb{C}P^1$, т.е., их распределение задается правой частью формулы (4).

В качестве примера такого пространства W , напомним, что $\text{GOE}_n^{\mathbb{C}}$ это – распределение на пространстве $\text{Sym}_n^{\mathbb{C}}$ of комплексно-значных симметрических матриц, у которых каждый вне-диагональный элемент $e_{i,j} = e_{j,i}$, $i < j$ $n \times n$ -матрицы имеет нормальное распределение $N(0, 1/2) + iN(0, 1/2)$, а каждый диагональный элемент $e_{i,i}$ распределен согласно $\sqrt{2}(N(0, 1/2) + iN(0, 1/2))$.

В качестве других интересных примеров линейных пространств W , удовлетворяющих условиям Предложения 2, можно привести теплицевы матрицы, ленточные матрицы, ленточные теплицевы матрицы, диагональные матрицы, и т.д.

В дальнейшем будет рассматривать Гауссов ортогональный и Гауссов унитарный ансамбли. Очень существенной чертой этих случаев является то, что распределение их точек ветвления инвариантно относительно действия подгруппы $SO_2 \subset SU_2$, заданной той же формулой (6), но с вещественными u и v , удовлетворяющими условию $u^2 + v^2 = 1$.

В описанной выше реализации $\mathbb{C}P^1$ как единичной сферы $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, SO_2 действует на ней поворотами относительно оси Y .

Это обстоятельство влечет, что семейство орбит действия SO_2 на единичной сфере $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$, спроектированное комплексную плоскость параметра $\lambda = x + iy$ будет совпадать с семейством окружностей, заданным формулой

$$x^2 + (y - t)^2 = t^2 - 1, \quad |t| \geq 1.$$

Рассмотрим цилиндрические координаты (ρ, ψ, Y) , где $X = \rho \cos \psi$, $Y = Y$, $Z = \rho \sin \psi$. Тогда (ψ, Y) , $0 \leq \psi \leq 2\pi$, $-1 \leq Y \leq 1$ опять параметризуют единичную сферу $S^2 \simeq \mathbb{C}P^1$. Из действия SO_2 вытекает, что в цилиндрических координатах (ψ, Y) распределения точек ветвления вышеуказанных ансамблей на $\mathbb{C}P^1$ имеют вид :

$$\text{dens}(\psi, Y)d\psi dY = \rho(Y)d\psi dY,$$

для некоторых конкретных функций ρ , т.е., плотность зависит только от Y и не зависит от угловой переменной ψ . (В общем случае, $\rho(Y)dY$ может быть 1-мерной мерой, т.е. не обязательно гладкая функция.)

В аффинных координатах,

$$\text{dens}(x, y)dx dy = \rho \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \right) \frac{4dx dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}, \quad (7)$$

где ρ имеет тот же смысл, что и выше.

В случае $\text{GOE}_n^{\mathbb{R}}$ удастся показать следующее.

Теорема

Если матрицы A и B независимо выбираются из ансамбля $\text{GOE}_2^{\mathbb{R}}$, то распределение точек ветвления в пучке $A + \lambda B$ также равномерно на $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \supset \mathbb{C}$, т.е., его плотность задается правой частью формулы (4).

Интенсивные численные эксперименты приводят к следующей гипотезе.

Гипотеза

Для любого размера $n > 2$, если матрицы A and B независимо выбираются из $\text{GOE}_n^{\mathbb{R}}$, то распределение точек ветвления пучка $A + \lambda B$ равномерно на $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \supset \mathbb{C}$.

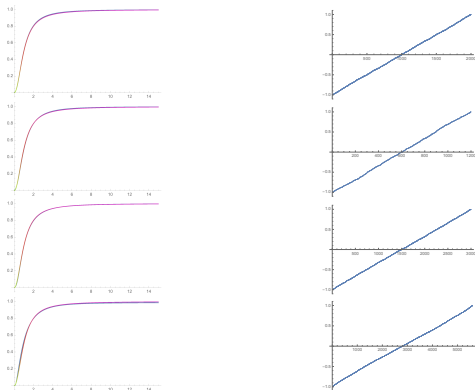


Figure: Численные и теоретические радиальные и угловые функции распределения точек ветвления пучка $A + \lambda B$, где A и B выбраны из GOE_n , для $n = 2, 4, 6, 8$.

Следующие результаты относятся к Гауссову унитарному ансамблю.

Теорема

Если матрицы A и B независимо выбираются из ансамбля GUE_2 , тогда распределение точек ветвления в \mathbb{C} задается формулой

$$\mathcal{P}_{\text{GUE}_2}(x, y) dx dy = \frac{4|y| dx dy}{\pi(1 + x^2 + y^2)^3}. \quad (8)$$

В цилиндрических координатах (ψ, Y) на $\mathbb{C}P^1$, где $0 \leq \psi \leq 2\pi$ и $-1 \leq Y \leq 1$, получаем

$$\mathcal{P}_{\text{GUE}_2}(\psi, Y) d\psi dY = \frac{|Y| d\psi dY}{2\pi}. \quad (9)$$

К сожалению, в настоящий момент мы не имеем явной гипотезы для плотностей $\mathcal{P}_{\text{GUE}_n}(x, y)$, при $n \geq 3$. Однако, нами были проведены интенсивные численные эксперименты для размеров матриц до 6×6 по следующей схеме. Для $n \in \{2, \dots, 6\}$, разыгрывая независимо пары GUE_n -матриц, мы вычисляли 12,000 точек ветвления для каждого n и отмечали значения $|Y|$ для полученных точек ветвления в порядке возрастания, см. следующий рисунок. Эти эксперименты приводят к следующей гипотезе.

Гипотеза

Существует предельное распределение

$$\mathcal{P}_{\text{GUE}_\infty}(Y) := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_{\text{GUE}_n}(Y).$$

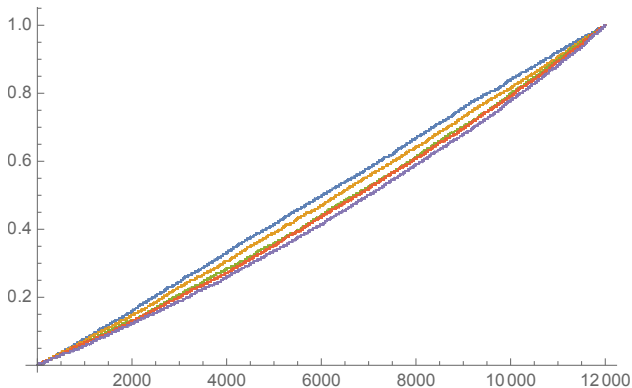


Figure: Эмпирические распределения $|Y|$ в пучках $A + \lambda B$ для GUE_n при $n = 2, 3, 4, 5, 6$. (Кривые, соответствующие возрастанию n , лежат одна под другой; синяя прямая линия соответствует $n = 2$, см. (9).)

Наконец, рассмотрим случай (несимметричного) вещественного Гауссова ансамбля $GE_n^{\mathbb{R}}$. Аналогично, нам не удалось получить явных формул для распределений точек ветвления для $GE_n^{\mathbb{R}}$ при $n \geq 3$, но как и в предыдущем случае, проводились многочисленные численные эксперименты. Они подтверждают следующие догадки.

Гипотеза

Среднее число вещественных точек ветвления при A и B , независимо выбираемых из $GE_n^{\mathbb{R}}$, равно $\sqrt{n(n-1)}$.

Гипотеза

При $n \rightarrow \infty$, распределение точек ветвления при A и B независимо выбираемых из $GE_n^{\mathbb{R}}$ приближается к равномерному распределению на $\mathbb{C}P^1$.

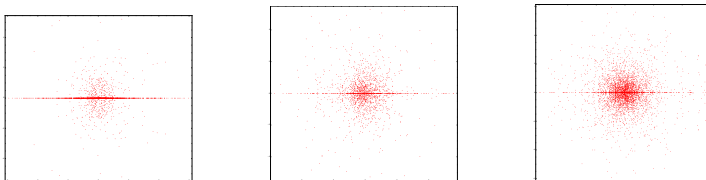


Figure: Распределения точек ветвления на плоскости λ , в случае когда A и B выбираются из $GE_n^{\mathbb{R}}$ при $n = 2, 5, 10$. Видна тенденция приближения к равномерному распределению на $\mathbb{C}P^1$.

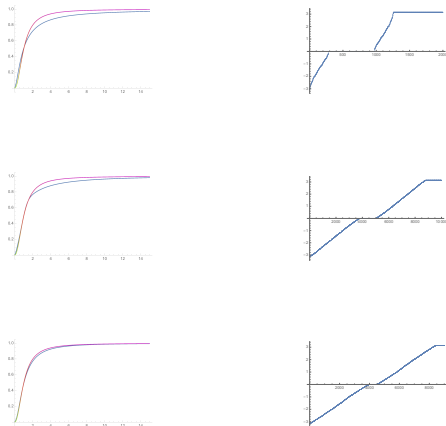


Figure: Радиальное и угловое распределения точек ветвления при A and B выбираемых из $GE_n^{\mathbb{R}}$ для $n = 2, 5, 10$ приближаются к равномерному распределению на $\mathbb{C}P^1$ с ростом n .

Случаи GOE_3 - и GUE_3 -ансамблей

Если λ_i является i -той точкой ветвления в верхней полуплоскости в порядке возрастания вещественной части, рассмотрим путь на плоскости λ , начинающийся на вещественной прямой в точке $\tau = \text{Re}(\lambda_i)$, идущий вверх до λ_i , проходящий по малой петле вокруг λ_i против часовой стрелки, и возвращающийся назад к τ_i .

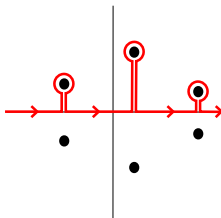


Figure: Создание последовательности монодромии

В результате, возникает транспозиция σ_i двух вещественных собственных значений, связанных с $\tau_i = \operatorname{Re}(\lambda_i)$. Выполняя эту операцию для λ_i , $i = 1, \dots, \binom{n}{2}$, мы получаем последовательность из $\binom{n}{2}$ транспозиций $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\binom{n}{2}})$, $\sigma_i \in S_n$.

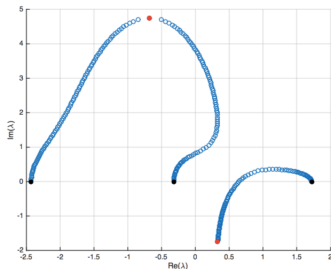
Легко проверить, что эта последовательность транспозиций $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{\binom{n}{2}})$ удовлетворяет следующим двум условиям:

- (i) для матриц A и B общего положения, она порождает симметрическую группу S_n ;
- (ii) произведение $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_{\binom{n}{2}}$ совпадает с обратной перестановкой $(n, n-1, \dots, 1)$.

Для $n = 3$, легко проверить, что существуют только 8 троек транспозиций из S_3 , удовлетворяющих условиям (i) и (ii).

These triples are: $(12)(12)(13)$; $(12)(13)(23)$; $(12)(23)(12)$;
 $(13)(12)(12)$;

$(13)(23)(23)$; $(23)(12)(23)$; $(23)(13)(12)$; $(23)(23)(13)$. (Для сравнения, для $n = 4$, существуют уже 3840 6-ок транспозиций из S_4 , удовлетворяющих (i) и (ii).)



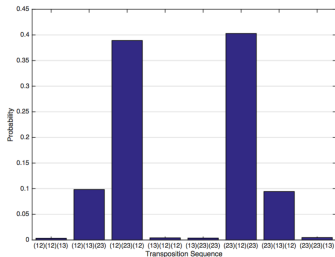
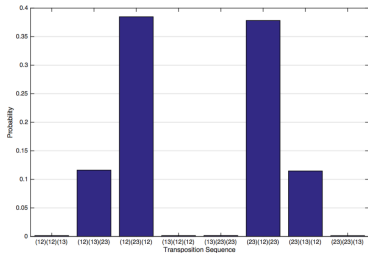


Figure: Численные вероятности возникновения троек транспозиций для GUE_3 - и GOE_3 -ансамблей.

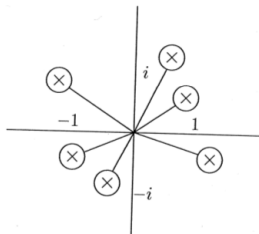
$GE_3^{\mathbb{C}}$ -ансамбль.

Figure: Пример набора путей на плоскости λ , выбранного для определения монодромии пары (A, B) для $GE_3^{\mathbb{C}}$.

Для A и B из $GE_3^{\mathbb{C}}$, существует 240 последовательностей 6-ок транспозиций $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_6)$ из S_3 , удовлетворяющих условиям:

- (i) они порождают симметрическую группу S_3 ;
- (ii) произведение $\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_6$ совпадает с тождественной перестановкой $(1, 2, 3)$.

Было сгенерировано 150000 случайных пар матриц из $GE_3^{\mathbb{C}}$ и вычислены из последовательности монодромии. Численные результаты показывают следующее, см. следующий Fig. 16.

- (i) Из 240 возможных случаев, только 209 реализовались. Из них только 204 реализовались более одного раза.
- (ii) Наиболее часто встречающиеся последовательности монодромии были $(23)(12)(23)(12)(23)(12)$, с эмпирической вероятностью 2.43 % и $(12)(13)(13)(23)(23)(12)$ с вероятностью 2.29 %.
- (iii) Последовательности монодромии, в которых одна и та же транспозиция встречалась 4 раза подряд, а за ней два раза другая транспозиция (и их циклические перестановки) (например, $(12)(12)(12)(12)(13)(13)$ или $(12)(23)(23)(23)(23)(12)$) имели наименьшую частоту, возникая один раз или ни разу вообще.

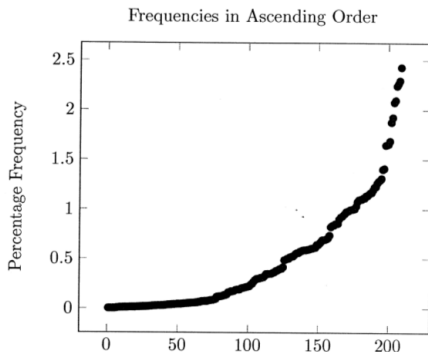







Figure: Частоты возникновения 240 допустимых 6-ок транспозиций S_3 в порядке возрастания.

Замечание

Одно особенно странное и интересное наблюдение состоит в том, что нумерация собственных чисел по видимому существенна для частоты возникновения последовательностей монодромии. В случае $GE_3^{\mathbb{C}}$ -ансамбля, можно перенумеровать три прообраза точки $\lambda = 0$, т.е., собственные значения матрицы A , с помощью действия S_3 . Обычно, под действием примерно половины из шести элементов группы частота меняется либо увеличиваясь вдвое либо уменьшаясь вдвое. Другая половина элементов группы не меняет частоты, но какие именно элементы группы S_3 производят то или другое, зависит от случая к случаю. Нам не удалось понять, как в точности это происходит или найти объяснение этому явлению.

Открытые проблемы

В докладе было сформулировано много нерешенных задач. В частности, хотя простой гипотетический ответ для распределения точек ветвления в случае GOE, сформулированный в Теореме 2 и Гипотезе 1, указывает на возможное наличие дополнительной симметрии помимо вышеуказанного действие SO_2 , нам не удалось его обнаружить.

-  C. Bender and S. Boettcher, Quasi-exactly solvable quartic potential, J. Phys. A 31 (1998), no.14, L273–277.
-  C. Bender, T. Wu, Anharmonic oscillator. Phys. Rev. (2) 184, (1969), 1231–1260.
-  C. Bender, G. Dunne, Quasi-exactly solvable systems and orthogonal polynomials. J. Math. Phys. 37, (1996), 6–11.
-  M. Bertola, T. Bothner, Zeros of large degree Vorob'ev-Yablonski polynomials via a Hankel determinant identity. Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 19, 9330-9399
-  M. Zirnbauer, J. Verbaarschot and H. Weidenmüller, Destruction of order in nuclear spectra by a residual GOE interaction, Nucl. Phys. A411, 161 (1983).

Благодарю за внимание!