1988 г. июль — август *т. 43, вып. 4 (262)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СОВМЕСТНЫЕ ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ И МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

(одиннадцатая сессия, 18—21 января 1988 г.)

Одиннадцатая совместная сессия семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества открылась 18 января 1988 г. в здании МГУ на Ленинских горах. В ее работе приняли участие более 300 человек из 23 городов, представляющих 14 союзных и автономных республик. Было заслушано и обсуждено 160 докладов, относящихся к самым различным областям теории уравнений с частными производными, теории обыкновенных уравнений, математической физики и механики, алгебраической геометрии, топологии и современного анализа.

Ниже приведены подготовленные авторами резюме докладов, прочитанных на заседаниях, а также тексты некоторых ставившихся на них нерешенных задач.

Утреннее заседание 18 января 1988 г.

1. Заседание открыл первый проректор МГУ В. А. Садовничий. Он указал, что совместные заседания семинара имени И. Г. Петровского и Московского математического общества, посвященные памяти одного из крупнейших математиков современности Ивана Георгиевича Петровского, стали традиционными, и они играют большую роль в научной жизни нашей страны. В них участвуют многие крупные специалисты в различных областях математики, механики, математической физики. Эти заседания приносят большую пользу делу развития науки и воспитания молодых математиков. В. А. Садовничий пожелал участникам сессии успешной работы.
2. В. И. Арнольд «О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями».
3. А. М. Поляков «Квантовая гравитация в двух измерениях».

Вечернее заседание 18 января 1988 г., секция 1

1. В. С. Владимиров «Уравнение Винера — Хопфа и задача Римана — Гильберта в алгебрах Неванлинны и Смирнова».
2. Б. В. Федосов «Теорема об индексе в алгебре квантовых наблюдаемых».
3. Ю. И. Карлович, Г. С. Литвинчук (Одесса) «Локальный метод исследования нётеровости в банаховых алгебрах сингулярных интегральных операторов с дискретными субэкспоненциальными группами сдвигов».

Пусть $\mathscr{L}$ — алгебра линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве X; $\mathscr{L}_0$ — идеал компактных операторов в $\mathscr{L}$, $| T | = \inf \{ \| T + K \| : K \in \mathscr{L}_0\}$; $\mathfrak{A}$ — некоторая подалгебра $\mathscr{L}$ с единицей; $\mathfrak{B}$ — банахова подалгебра $\mathscr{L}$, порожденная операторами $A \in \mathfrak{A}$, $K \in \mathscr{L}_0$ и некоторым оператором $S \in \mathscr{L}$; $\mathfrak{H}$ — двусторонний замкнутый идеал алгебры $\mathfrak{B}$, порожденный идеалом $\mathscr{L}_0$ и всеми коммутаторами $[A, S]$ $(A \in \mathfrak{A})$.

Разработан общий метод исследования нётеровости операторов вида $N = A_+P_+ + A_-P_- + H_0$, где $A_\pm \in \mathfrak{A}$, $P_\pm = (I \pm S)/2$, $H_0 \in \mathfrak{H}$. Пусть

(П1) ($\forall$ необратимого $A \in \mathfrak{A}$ $(\forall H_0 \in \mathfrak{H})$ $(\forall \varepsilon > 0)(\exists A_\varepsilon \in \mathfrak{A})(\exists H_\varepsilon \in \mathfrak{H})$ такие, что $|A - A_\varepsilon| < \varepsilon$, $|H_0 - H_\varepsilon| < \varepsilon$ и выполняется одно из условий:

(i) ($\exists$ последовательность $f_n \in X$, $\| f_n \| = 1)(\forall H \in \mathfrak{H}_\varepsilon = \{[A_\varepsilon, S], I - S^2, H_\varepsilon P_\pm, P_\pm H_\varepsilon\})$ последовательности $\{A_\varepsilon f_n\}$ и $\{Hf_n\}$ сходятся в X, а последовательности $\{P_\pm f_n\}$ не содержат сходящихся в X подпоследовательностей;

(ii) получаемое из (i) заменой X на X^*, а операторов — их сопряженными.

Теорема. *При выполнении* (П1) *оператор N нётеров тогда и только тогда, когда обратимы операторы $A_\pm \in \mathfrak{A}$ и$(\forall H \in \}[A_\pm, S], [A_\pm, S^2], I - S^2, H_0\}\setminus\mathscr{L}_0)$ оператор N H-нётеров т. е.*

$$(\exists N_H, N'_H \in \mathscr{L}) \; | NN_H - H | = | N'_H N - H | = 0.$$

Построена локальная теория H-нётеровости. В качестве приложения исследованы на нётеровость алгебры, указанные в заглавии.

4. Н. Л. Василевский (Одесса) «Операторы типа свертки на стандартных многообразиях Коши-Римана».

5. Д. Г. Васильев, М. Р. Левитин, В. Б. Лидский «Вынужденные колебания оболочки, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью».

Задача ([1], [2]) ($\gamma = 0$) исследуется асимптотически. Малые параметры — толщина оболочки h и вязкость жидкости η.

Теорема. *Пусть нагрузка бесконечно гладкая, а h и η связаны соотношением $h^{\varkappa_1} < \eta < h^{\varkappa_2}$, $\varkappa_1 > \varkappa_2 > 2$, $h \to +0$. Тогда для того чтобы на фиксированном отделенном от нуля частотном отрезке наблюдался квазирезонанс* ([1], с. 24), *необходимо и достаточно, чтобы этот отрезок содержал собственную частоту ω вспомогательной однородной тангенциальной подзадачи*

$$l_{pq}u_q = \rho_0\omega^2 E^{-1}u_p, \qquad p, q = 1, 2,$$

или вспомогательной однородной жидкостной подзадачи

$$\Delta\psi + (\omega/c_{\text{ж}})^2\psi = 0, \qquad \psi|_\Gamma = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Васильев Д. Г., Лидский В. Б. Квазирезонансы в задаче о вынужденных колебаниях тонкой упругой оболочки, взаимодействующей с жидкостью// Функцион. анализ и его прил.— 1986.— Т. 20, вып. 4.— С. 17—28.

[2] Левитин М. Р. О спектре собственных колебаний оболочки, заполненной вязкой сжимаемой жидкостью// ДАН СССР.— 1987.— Т. 295, № 6.— С. 1355—1358.

6. А. А. Даниелян, Б. М. Левитан «Асимптотика функции Вейля — Титчмарша».

7. Д. В. Ефремов, М. А. Шубин. «Асимптотика функции распределения спектра автоморфных операторов типа Шрёдингера на пространстве Лобачевского».

Пусть $\mathbb{H}^n$ — n-мерное пространство Лобачевского, Γ — дискретная группа его преобразований, причем $\mathrm{vol}(\mathbb{H}^n/\Gamma) < \infty$, Δ — оператор Бельтрами — Лапласа на $\mathbb{H}^n$. Рассмотрим в $L^2(\mathbb{H}^n)$ самосопряженный оператор $A = (-\Delta)^{m/2} + T$, где $m > 0$, T — равномерно собственный Γ-периодический псевдодифференциальный оператор порядка

$m-r$, $r>0$. Обозначим через $e(\lambda, x, y)$ спектральную функцию оператора A и введем функцию распределения спектра

$$N(\lambda)=\int\limits_F e(\lambda, x, x)\,dx,$$

где F — фундаментальная область Γ, dx — элемент объема на $\mathbb{H}^n$.

Теорема. *При $\lambda\to+\infty$ имеет место асимптотика*

$$N(\lambda)=\sum_{j=0}^{k} c_j\lambda^{(n-2j)/m}+O(\lambda^{(n-r)/m})$$

где k — наибольшее целое число, меньшее, чем $r/2$, а c_j выражаются через коэффициенты Минакшисундарама — Плейеля оператора Δ.

Аналогичный результат для проинтегрированной плотности состояний почти-периодических операторов в $\mathbb{R}^n$ также верен и в случае оператора Шрёдингера был установлен в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Шубин М. А. Теорема Вейля для оператора Шрёдингера с почти-периодическим потенциалом//Вестник МГУ, сер. мат., мех.— 1976.— № 2.— С. 84—88.

8. А. В. Бреннер «Теорема о неподвижных точках для $\bar\partial_b$-комплекса на строго псевдовыпуклом многообразии».

Пусть D — строго псевдовыпуклое многообразие с гладкой границей ∂D, $\mathscr{E}_p$ — $\bar\partial_b$-комплекс на ∂D (см. [1]), $p=0,\ldots,n$, $T=\{T_q\}_{q=0}^{n-1}$ — эндоморфизм комплекса $\mathscr{E}_p$, индуцированный биголоморфным отображением $F\colon D\to D$ с конечным числом изолированных неподвижных точек $A_1,\ldots,A_m$ на ∂D, $\{H^{p,q}T\}_{q=0}^{n-1}$ — соответствующий эндоморфизм когомологий. В [1] построены такие операторы R_q и $S_q(q=0,\ldots,n-1)$, что $\bar\partial_b R_q+R_{q+1}\bar\partial_b=\mathrm{Id}-S_q$. Пусть $\Omega_q(z,\xi)$ — ядро оператора R_q, $\Omega=\sum\limits_{q=1}^{n-2}(-1)^q\Omega_q(z,\xi)$. Введем числа Лефшеца

$$\mathscr{L}_p(F)=\sum_{q=1}^{n-2}(-1)^q\operatorname{tr}(H^{p,q}T),\quad \mathscr{L}_p^{\text{полн}}(F)=\sum_{q=0}^{n-1}(-1)^q\operatorname{tr}(H^{p,q}TS).$$

Теорема. 1) $\mathscr{L}_p(F)=\sum\limits_{k=1}^{m}\int\limits_{\sigma_k}\Omega(F(\xi),\xi)$, *где $\sigma_k\subset\partial D$ — достаточно малые $(2n-2)$-мерные сферы с центрами в A_k.* 2) *Если A_k невырождены, то*

$$\mathscr{L}_p^{\text{полн}}(F)=\mathscr{L}_p(F)+\sum_{l=1}^{m}\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}\Lambda^p(dF(A_l))\cdot\frac{1}{2}\operatorname{Det}_{\mathbb{R}}^{-1}(1-dF(A_l))\cdot[1-n^{-1}\overline{\operatorname{tr}_{\mathbb{C}} dF(A_l)}+$$
$$+(-1)^{n-1}\overline{\operatorname{tr}_{\mathbb{C}}\Lambda^{n-1}(dF(A_l))}+(-1)^n n\,\overline{\operatorname{Det}_{\mathbb{C}}(dF(A_l))}].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Хенкин Г. М. Уравнение Г. Леви и анализ на псевдовыпуклом многообразии 1// УМН.— 1977.— Т. 32, вып. 3.— С. 57—118.

Вечернее заседание 18 января 1988 г., секция 2

1. О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе «Бесконечномерные дифференциальные уравнения, описывающие модель квантовой релятивистской струны».

2. П. Г. Гриневич «Двумерная обратная задача рассеяния при фиксированной энергии».

3. О. И. Богоявленский «Счетное множество интегрируемых дискретизаций уравнения Кортевега — де-Фриза».

4. В. Б. Матвеев «Решенные и нерешенные вычислительные проблемы в конечнозонном интегрировании».

5. Р. Ф. Бикбаев, В.Ю. Новокшенов, Р. А. Шарипов «Асимптотика при $t \to \infty$ решения задачи Коши для уравнения КДФ с конечнозонными граничными условиями».

6. А. К. Погребков «Тест Пенлеве как критерий интегрируемости нелинейных уравнений».

7. А. Т. Фоменко «Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем».

Вечернее заседание 18 января 1988 г., секция 3

1. Л. А. Беклемишева «Матричное изложение некоторых алгоритмов аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений».

2. Н. А. Изобов, Р. А. Прохорова (Минск) «О множествах Р. Конти линейных дифференциальных систем».

Рассматриваем вещественные системы

$$(1) \qquad \dot{x} = A(t)\,x, \quad x \in R^n, \quad t \geqslant 0,$$

с кусочно-непрерывными коэффициентами и матрицами Коши $X_A\ (t, \tau)$. Множество всех тех систем (1), для которых выполнено условие

$$\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \| X_A(t, \tau) \|^p \, d\tau \leqslant C_p(A) < +\infty, \quad p = \mathrm{const} > 0, \quad t \geqslant 0,$$

будем обозначать, следуя Р. Конти [1], через L^pS при $\alpha(t) = 0$ и $\beta(t) = t$; M^pS при $\alpha(t) = t$ и $\beta(t) = +\infty$. В [1] установлено, что $L^pS \not\subset L^qS$ для любых $q > p \geqslant 1$, и поставлена задача о справедливости включения $L^qS \subset L^pS$ при $q > p \geqslant 1$. Эту задачу для введенных множеств решает

Теорема 1. *Включение* $L^qS \subset L^pS(M^qS \subset M^pS)$ *справедливо для любых* $q > p > 0$.

С помощью этой теоремы для внутренности $\operatorname{Int} L^pS$ множества L^pS, состоящей из всех тех $A \in L^pS$, для которых $A + Q \in L^pS$ при любой $Q(t)$ такой, что $\| Q(t) \| \leqslant \varepsilon_A$, $t \geqslant 0$, и аналогично определяемой внутренности $\operatorname{Int} M^pS$ множества M^pS доказана

Теорема 2. $\operatorname{Int} L^pS = L^pS(\operatorname{Int} M^pS = M^pS)$ *тогда и только тогда, когда* $p \geqslant 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Conti R. On a class of asymptotically stable linear differential equations//Tohoku Math. J. Second. Ser.—1980. V. 32, N 2.— P. 279—282.

3. О. Г. Илларионова «О взаимности верхнего центрального показателя и его миноранты».

Множество линейных систем

$$(1) \qquad \dot{x} = A(t)\,x, \quad x \in R^n, \quad t \geqslant 0, \quad \sup_{t \geqslant 0} | A(t) | < \infty,$$

где $A(t)$ — кусочно-непрерывная матрица, образует линейное пространство M_n, наделенное равномерной нормой.

Для системы (1) определены верхний центральный показатель $\Omega(A)$ ([1], § 8) и его миноранта $\mu(A)$ [2].

Показатель Ω как функционал на M_n всюду полунепрерывен сверху ([1], § 13), но не всюду полунепрерывен снизу, а его миноранта μ всюду полунепрерывна снизу, но не всюду полунепрерывна сверху.

Исследуется поведение показателей Ω и μ при малых возмущениях системы (1).

Теорема. *Для любой системы* (1) *справедливы соотношения*

$$\mu(A)=\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{\|B\|<\varepsilon}\Omega(A+B), \tag{2}$$

$$\Omega(A)=\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{\|B\|<\varepsilon}\mu(A+B). \tag{3}$$

Таким образом, показатели Ω и μ являются взаимными в смысле соотношений (2) и (3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В. Теория показателей Ляпунова.— М.: Наука, 1966.

[2] Илларионова О. Г. Критерий устойчивости верхнего центрального показателя// Дифференц. уравнения.— 1986.— Т. 32., № 12.— С. 2186—2187.

4. С. А. Кащенко (Ярославль) «Коротковолновые бифуркации в системах с малой диффузией».

5. А. Ю. Колесов, Ю. С. Колесов, Е. Ф. Мищенко, Н. Х. Розов «Асимптотика релаксационных колебаний».

6. В. Л. Кулик, А. М. Самойленко (Киев) «Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью вырождающихся квадратичных форм».

7. В. М. Миллионщиков «Почти периодические системы и устойчивость при постоянно действующих возмущениях».

Через f_ν^t обозначим ν-обмотку k-мерного тора T^k, т. е. положим $f_\nu^t x = x + t\nu \pmod 1$ при $\nu \in R^k$, $x = (x_1, \ldots, x_k) \pmod 1 \in T^k$, $t \in \mathbb{R}$. Пусть S_n^k — множество всех непрерывных отображений $A(\cdot)$: $T^k \to \operatorname{End}\mathbb{R}^n$, наделенное топологией равномерной сходимости. Обозначим через $B_n^k(\nu)$ множество пар $(A, x) \in S_n^k \times T^k$, *не обладающих* свойством: если показатели Ляпунова всех решений системы $\dot u = A(f_\nu^t x)u$ отрицательны, то ее нулевое решение устойчиво при постоянно действующих возмущениях.

Теорема. *При любых* $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $\nu \in R^k$ *множество* $B_n^k(\theta)$ *является множеством первой категории меры нуль в пространстве* $(S_n^k \times T^k, \mu)$, *где* μ — *произведение любой меры на* S_n^k, *в которой все борелевские множества измеримы, и меры Лебега на* T^k.

8. А. Ф. Филиппов «Исследование линейного уравнения с почти периодическими коэффициентами».

Утреннее заседание 19 января 1988 г., секция 1

1. И. В. Скрыпник (Донецк) «Квазилинейные эллиптические задачи в перфорированных областях».

2. Е. Я. Хруслов (Харьков) «Краевые задачи в слабосвязанных областях».

3. М. В. Козлова, Г. П. Панасенко «Асимптотика решения трехмерной задачи теории упругости в тонком неоднородном цилиндре».

4. В. А. Львов (Харьков) «Краевые задачи механики суспензий твердых частиц в вязкой жидкости».

5. В. В. Жиков, С. М. Козлов «Усреднение и перколяция».

Пусть F — случайное, статистически однородное, эргодическое множество в R^m, $a^\delta(x)$ — случайная функция, равная 1 на $R^m \setminus F$ и δ на F, $\delta \geqslant 0$, $a^\delta(x)$ интерпретируется как проводимость случайной среды. Эффективную проводимость можно определять как предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |Q|^{-1} \inf_{u-x\cdot\xi \in C_0^\infty(Q)} \int_Q a^\delta(x)\,(\nabla u)^2\,dx. \tag{1}$$

Здесь $\xi \in R^m$, Q — ограниченная область. Если $\delta > 0$, то по теории усреднения предел (1) существует и равен $(\hat a^\delta \xi, \xi)$, где $\hat a^\delta$ — усредненная матрица [1]. Однако вопрос о существовании эффективной проводимости в случае перфорированной области, т. е. при $\delta = 0$, оставался открытым. Справедлив следующий общий результат.

Теорема 1. *При $\delta = 0$ предел (1) существует и равен $(\hat{a}^0\xi, \xi)$, где $\hat{a}^0 = \lim\limits_{\delta \to 0} \hat{a}^\delta$.*

Важен вопрос о невырожденности $\hat{a}^0$. Рассмотрим его для случайной шахматной структуры. Пусть плоскость R^2 разбита на квадратные клетки и каждая клетка окрашивается в черный цвет с вероятностью p и в белый цвет с вероятностью $1 - p$, независимо от окраски остальных. Через F обозначим совокупность черных клеток. Ввиду симметрии, эффективная проводимость $\hat{a}^\delta(p)$ — скаляр. Пусть $p_0 = 1 - p_c$, где p_c — критическая вероятность просачивания в задаче узлов (см. [2]; известно, что $1/2 < p_c < 2/3$).

Теорема 2. *Эффективная проводимость $\hat{a}^0(p) > 0$ при $p < p_0$ и $a^0(p) = 0$ при $p \geqslant p_0$. Кроме того, существуют положительные постоянные c_i, $\alpha_i (i = 1, 2)$ такие, что*

$$c_1 (p_0 - p)^{\alpha_1} < \hat{a}^0 (p) \leqslant c_2 (p_0 - p)^{\alpha_2}, \quad p \leqslant p_0. \tag{2}$$

Для $\hat{a}^\delta(p)$ известно соотношение Дыхне $\hat{a}^\delta(p)\hat{a}^\delta(1 - p) = \delta \cdot 1$ (см. [1]), поэтому из теоремы 2 следует, что $\hat{a}^\delta(p) < c\delta$ при $p > 1 - p_0$. Из того же соотношения следует $\hat{a}^\delta(1/2) = \sqrt{\delta \cdot 1}$.

Теорема 3. *При $p_0 < p < 1 - p_0$ справедливо неравенство*

$$c_1 (p) \sqrt{\delta} \cdot 1 < \hat{a}^\delta (p) \leqslant c_2 (p) \sqrt{\delta} \cdot 1 \tag{3}$$

для некоторых постоянных $c_1(p)$, $c_2(p)$; $0 < c_1(p) < c_2(p) < \infty$.

Гипотеза о выполнении (3) в некоторой окрестности $p = 1/2$ высказывалась С. А. Молчановым. Пусть плоскость покрыта правильными D-угольниками площади 1, $D = 3, 4, 6$, и $\hat{a}_D^0 (p)$ — эффективная проводимость D-угольной случайной шахматной доски, построенной, как и выше.

Теорема 4. *Справедлива оценка*

$$| \hat{a}_D^0 (p) - 1 + \alpha_D p | < cp^2, \quad \alpha_D = \frac{\operatorname{tg} (\pi D^{-1})}{2\pi D} \, \frac{\Gamma^4 (D^{-1})}{\Gamma^2 (2D^{-1})}, \tag{4}$$

где $c > 0$, $D = 3, 4, 6$, а $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

Теоремы 1, 2 получены В. В. Жиковым, а 3, 4 — С. М. Козловым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Козлов С. М. Осреднение случайных операторов//Мат. сб.— 1979.— Т. 109, № 2.— С. 188—202.

[2] Кестен Х. Теория просачивания для математиков.— М.: Мир, 1986.

7. В. Л. Бердичевский «Проблема осреднения случайных структур в терминах функций распределения».

8. А. В. Пожидаев, В. В. Юринский (Новосибирск) «Оценка погрешности усреднения для симметричных эллиптических систем со случайными коэффициентами».

Пусть коэффициенты оператора

$$(L_\varepsilon u)^{(\alpha)} = \partial/\partial x_i \, (a_{ij}^{(\alpha\beta)} (x/\varepsilon, \omega) \, \partial u^{(\beta)}(x)/\partial x_j), \quad u: R^d \to R^m \tag{1}$$

образуют однородное случайное поле (повторение индексов подразумевает суммирование). Предположим, что всюду в R^d с вероятностью 1

$$\begin{gathered} a_{ij}^{(\alpha\beta)} = a_{ji}^{(\alpha\beta)} = a_{ij}^{(\beta\alpha)}, \ \forall Z \in R^d \otimes R^m, \quad z \in R^m, \quad y \in R^d \\ a_{ij}^{(\alpha\beta)} Z_i^{(\alpha)}(x) \, Z_j^{(\beta)} \geqslant A_{ij}^{(\alpha\beta)} Z_i^{(\alpha)} Z_j^{(\beta)}, \ A_{ij}^{(\alpha\beta)} z^{(\alpha)} z^{(\beta)} y_i y_j \geqslant A_- | z |^2 | y |^2, \ | a_{ij}^{(\alpha\beta)} | \leqslant A_+, \end{gathered} \tag{2}$$

причем константы $A_\pm$, $A^{(\because\because)}$ не случайны.

Теорема. *Пусть поле коэффициентов удовлетворяет условию равномерно сильного перемешивания: для любого конечного подмножества N целочисленной решетки*

$$|\operatorname{cov}(\zeta,\ \zeta^+)| \leqslant A(1+r)^{-\alpha}(\mathbf{D}\zeta\mathbf{D}\zeta^+)^{1/2}, \tag{3}$$

если случайные величины ζ, ζ^+ определяются, соответственно, значениями коэффициентов $a(y)$ на 1-окрестности N и дополнении r-окрестности N.

Тогда оператор (1) *имеет усредненный $\bar{L}$, и для любой функции φ класса $C_0^\infty(R^d)$ справедлива оценка*

$$\mathbf{E}\,\|(1-L_\varepsilon)^{-1}\varphi-(1-\bar{L})^{-1}\varphi\|\leqslant c\varepsilon^{\gamma/\ln\ln 1/\varepsilon},$$

где показатель $\gamma>0$ определяется константами в (2), (3), $\|\cdot\|$ — *норма в $L_2(R^d)$.*

Утреннее заседание 19 января 1988 г., секция 2

1. В. М. Бабич (Ленинград) «Геометрическое описание некоторых нелучевых эффектов в теории дифракции».

2. С. А. Габов, А. Г. Свешников «Новые математические задачи теории поверхностных волн».

3. М. В. Федорюк «Характеристики течения несжимаемой жидкости в гравитационном поле».

Рассматривается задача Коши в $\mathbb{R}^3$ для введенной В. П. Мясниковым системы

$$\rho_t+(\nabla\rho,\ v)=0,\quad \operatorname{div} v=0,\quad \operatorname{rot}^2 v=-\nabla p+\rho e_3, \tag{1}$$
$$\rho\,|_{t=0}=\rho_0(x),$$

где $\rho_0\in C_0^1(\mathbb{R}^3)$. Для ρ получается квазилинейное интегродифференциальное уравнение первого порядка. Ядра интегральных операторов имеют особенности (случай гладких ядер исследован В. П. Масловым). Система для характеристик преобразована к виду

$$\dot{x}(t,\ s)=\int G(x(t,\ s)-x(t,\ \xi))\,e_3\rho_0(\xi)\,d\xi,\quad x(0,\ s)=s, \tag{2}$$

где $\operatorname{rot}^3 G(x)=\operatorname{rot}(\delta(x)I)$, $G(\infty)=0$. Доказаны

Теорема 1. *Решение задачи* (2) *существует при всех $t\in\mathbb{R}$ и*

$$|x(t,\ s)-s|\leqslant C(T)\,|t|\,(1+|s|)^{-1},\quad |\partial x/\partial s-I|\leqslant C(T)(1+|s|)^{-2}, \tag{3}$$
$$|t|\leqslant T,\quad s\in\mathbb{R}^3,\qquad \forall T>0.$$

Теорема 2. *Решение задачи* (2), *удовлетворяющее оценкам* (3), *единственно при всех $t\in\mathbb{R}$.*

В двумерной задаче существование решения доказано только за конечное время.

4. В. В. Пухначёв (Новосибирск) «Задача обтекания вязкой жидкостью самодвижущегося тела».

5. Д. Г. Орловский, А. И. Прилепко «О полугрупповом подходе к обратным задачам математической физики».

6. Г. А. Свиридюк (Челябинск) «Релаксационные колебания эволюционных и динамических систем теории вязкоупругих сред».

7. А. Г. Руткас (Харьков) «Существование и единственность полей H- и E-типа в волноводе с пространственной дисперсией».

Утреннее заседание 19 января 1988 г., секция 3

1. В. В. Козлов «О группах симметрий динамических систем».

2. В. В. Трофимов «Обобщенные классы Маслова лагранжевых поверхностей в симплектических многообразиях».

Пусть $N^n\subset M^{2n}$ — лагранжево подмногообразие симплектического многообразия M^{2n}. На M^{2n} рассмотрим связность Γ^i_{jk}, согласованную с симплектической структурой; ее группу голономии обозначим через G. Параллельный перенос касательного пространства T_xN^n в точку $x_0\in M^{2n}$ порождает корректно определенное отображение $f\colon N^n\to$

$\to \Lambda(T_{x_0}M^{2n})/G$ многообразия N^n в фактор-пространство $\Lambda(T_{x_0}M^{2n})/G$ лагранжева грассманиана $\Lambda(T_{x_0}M^{2n})$ по естественному действию группы голономии G. Если $a \in H^*(\Lambda\ (T_{x_0}M^{2n})/G)$, то определен характеристический класс $a(N) = f^*(a) \in H^*(N^n)$ лагранжева подмногообразия N^n.

Теорема 1. *Пусть M^{2n} — симплектическое многообразие, а $N^n \subset M^{2n}$ — лагранжево подмногообразие в M^{2n}. Характеристический класс $a(N^n)$ лагранжева подмногообразия N^n, отвечающий классу когомологий $a \in H^*(\Lambda(T_{x0}M^{2n})/G)$, не зависит от выбора симплектической связности с данной группой голономии G.*

Теорема 2. *Пусть M — кэлерово многообразие, N — лагранжево вполне геодезическое подмногообразие. Тогда все характеристические классы Маслова $a(N)$ подмногообразия N равны нулю.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Маслов В. П. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.

3. Ле Хонг Ван «Минимальные лагранжевы поверхности в симплектических пространствах».

Пусть $(M^{2n}, J, \langle\ \rangle)$ — почти эрмитово многообразие и Φ — его 2-фундаментальная форма: $\Phi(X, Y) = \langle X, JY\rangle$. Подмногообразие $L^n \subset M^{2n}$ называется минимальным Φ-лагранжевым, если оно минимально относительно метрики и ограничение формы Φ на L аннулируется. Ясно, что если форма Φ замкнута, то она определяет симплектическую структуру на M^{2n} и Φ-лагранжевы подмногообразия являются просто лагранжевыми. Доказывается критерий минимальности Φ-лагранжевых подмногообразий в почти эрмитовых многообразиях. Особый интерес представляют эрмитовы многообразия M^{2n} (т. е. структура J на M^{2n} интегрируема). В следующих теоремах мы предположим, что L является минимальным Φ-лагранжевым подмногообразием в эрмитовом многообразии M^{2n}.

Теорема 1. *Пусть X — нормальное векторное поле с компактным носителем на L и Ω — первая форма Черна на L. Тогда выполняется следующее неравенство:*

$$XX\left(\int_L \mathrm{vol}\right) \geqslant -2\pi \int_L \Omega(X, JX).$$

Следствие. *Если форма Ω неположительна: $\Omega(X, JX) \leqslant 0$, то L устойчиво.*

Теорема 2. *Пусть H_0 является подгруппой в группе голономии эрмитовой связности на M^{2n}, порожденной параллельными переносами вдоль петлей на L, и пусть $\Lambda^+ \simeq U_n/\mathrm{SO}_n$ — грассманиан ориентированных лагранжевых плоскостей в $\mathbb{R}^{2n} \simeq \mathbb{C}^n$. Тогда*

i) *подгруппа H_0 содержится в группе SU_n;*

(ii) *композиция $\det j\colon L \to \Lambda^+/H_0 \to S^1$ переводит L в точку.*

4. В. Л. Гинзбург «Отношения кобордантности для симплектических и контактных многообразий».

5. В. П. Костов «Особенности поверхности Стокса для типичных двупараметрических семейств с комплексными коэффициентами».

6. Б. З. Шапиро «Граница области неосцилляционности для линейных гамильтоновых систем».

Линейная гамильтонова система (ЛГС) в $T^*\mathbb{R}^n$ с координатами (p, q), заданная на отрезке времени I, называется неосцилляционной на I, если для любого его ненулевого решения $p(t)$ обращается в нуль на I не более чем в одной точке.

Шлейфом $Ш(\alpha)$ лагранжевой плоскости α, лежащей в неориентированном лагранжевом грассманиане Λ, называется множество всех лагранжевых плоскостей, не трансверсальных α (см. [1]). $Ш(\alpha)$ естественно стратифицирован на орбиты действия симплектической группы.

Лемма. *ЛГС неосцилляционна тогда и только тогда, когда траектория $\mathrm{tr}(\lambda)$ лагранжевой плоскости λ, задаваемой условием $p = 0$, под действием индуцированного ЛГС потока на Λ не пересекает $Ш(\lambda)$.*

Концевым отображением π назовем отображение, сопоставляющее ЛГС концевую точку ее траектории $\mathrm{tr}(\lambda)$.

Лемма. *Отображение π является субмерсией для четырех классов ЛГС*: 1) *росток в нуле* $\mathrm{tr}(\lambda)$ *не лежит на* $Ш(\lambda)$; 2) *гамильтониан положительно определен на* λ; 3) *гамильтониан положительно определен на всех лагранжевых плоскостях*; 4) *линейные вариационные уравнения.*

Следствие. *Особенности границы области неосцилляционных ЛГС, встречающиеся в типичных k-параметрических семействах в каждом из четырех классов систем, диффеоморфны особенностям k-параметрических сечений шлейфа, трансверсальных его стратификации, которые диффеоморфны цилиндрам над шлейфами в лагранжевых грассманианах меньшей размерности.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арнольд В. И. Теоремы Штурма и симплектическая геометрия// ФАН.— 1985.— Т. 19, вып. 4.— С. 1—10.

7. М. Б. Севрюк «Стационарная и нестационарная устойчивость циклов обратимых систем».

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$(1)\qquad \partial^4u/\partial x^4=U\,(D^{r,\,s}u),\quad D^{r,\,s}u=\partial^{r+1}u/\partial x^r\,\partial t^s,\qquad 0\leqslant r\leqslant 3,\quad 0\leqslant s\leqslant N$$

($x\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}$, $u=u(x,t)$: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{N}$), где гладкая функция U является четной по аргументам $D^{1,s}u$ и $D^{3,s}u$ (условие обратимости). Пусть $u=f(x)$ — периодическое решение (цикл) соответствующего стационарного уравнения

$$(2)\qquad d^4u/dx^4=U\,(u,\ du/dx,\ d^2u/dx^2\ \ d^3u/dx^3,\ 0,\ \ldots,\ 0),\qquad u=u\,(x)$$

(нули стоят на месте $D^{1,s}u$ с $s\geqslant 1$). Этот цикл называется *стационарно устойчивым*, если его мультипликаторы (как замкнутой траектории (2)) лежат на единичной окружности, и *нестационарно устойчивым*, если уравнение

$$d^4y/dx^4=\sum_{r,\,s}\,(\partial U/\partial\,(D^{r,s}u))\,\lambda^s d^ry/dx^r,\quad y=y\,(x),\ \lambda\in\mathbb{C}$$

(производные функции U берутся в точке $(f, f', f'', f''', 0, \ldots, 0)$) не имеет ограниченных на $\mathbb{R}$ ненулевых решений при $\mathrm{Re}\,\lambda>0$.

Теорема. *В классе уравнений* (1), *удовлетворяющих условию обратимости, общим образом встречается следующее явление. Стационарное уравнение* (2) *имеет гладкое однопараметрическое семейство циклов* $u=f_a(x)$ ($a\in R$ — *параметр семейства*), *причем* $f_a(-x)\equiv f_a(x)$. *При* $a<a_0$ *циклы* $f_a(x)$ *стационарно устойчивы, но нестационарно неустойчивы, а при* $a>a_0$, *наоборот, стационарно неустойчивы, но нестационарно устойчивы.*

8. О. В. Трошкин «Алгебраическая структура двумерных стационарных уравнений Навье — Стокса и нелокальные теоремы единственности».

Вечернее заседание 19 января 1988 г., секция 1

1. М. М. Гехтман, И. В. Станкевич «Классификация таммовских уровней энергии одномерных полубесконечных кристаллов».

2. М. С. Бирман, М. З. Соломяк «Операторное интегрирование и теория возмущений».

3. Ю. Д. Головатый «О собственных частотах и собственных колебаниях упругого стержня с присоединенной массой».

Исследовано поведение при $\varepsilon\to 0$ собственных значений (с. з.) $\lambda(\varepsilon, m)$ задачи

$$(1)\qquad Lu_\varepsilon-\lambda\,(\varepsilon,\ m)\,(p\,(x)+\varepsilon^{-m}q\,(x/\varepsilon))\,u_\varepsilon=0,\quad x\in\Omega=(a_-,\ a_+),\ u_\varepsilon\,(a_\pm)=u'_\varepsilon\,(a_\pm)=0,$$

где $Lu=(k_2(x)u'')''-(k_1(x)u')'+k_0(x)u$, $\varepsilon>0$, $m\in\mathbb{R}$, $a_-<0<a_+$; k_i, p — гладкие, ограниченные в Ω функции, причем k_2, $p>0$ и k_1, $k_2\geqslant 0$ в $\overline{\Omega}$; $q(\xi)>0$ при $|\xi|\leqslant 1$ и $q(\xi)=0$ при $|\xi|>1$, $\xi=x/\varepsilon$. Положим $q_s=(q,\ \xi^s)_{L_2(-1,1)}$, $h=q_2-q_1^2/q_0$, $[f]_0=$

$= f(+0) - f(-0)$. Пусть $\{\lambda^k(\varepsilon, m)\}_{k=1}^{\infty}$ — с. з. задачи (1), занумерованные по возрастанию и с учетом кратности, а $\{\lambda^k(m)\}_{k=1}^{\infty}$ — с.з. задачи

(2) $\quad Lv - \lambda(m)p(x)v = 0,\ x \in \Omega\diagdown 0,\quad v(a_\pm) = v'(a_\pm) = 0,\quad B_m v = 0.$

Условие $B_m v = 0$ и используемая ниже величина $\gamma(m)$ определяются так:

m	$B_m v=0$	$\gamma(m)$
$m<1$	$[v^{(i)}]_0=0\ (i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$	$1-m$
$m=1$	$[v^{(i)}]_0=0\ (i=0,\ 1,\ 2);\ k_2(0)\,[v''']_0-\lambda q_0 v(0)=0$	1
$1<m<3$	$v(0)=0,\ [v^{(i)}]_0=0\ (i=1,\ 2)$	$\min(m-1,\ 3-m)$
$m=3$	$v(0)=0,\ [v']_0=0,\ k_2(0)\,[v'']_0+\lambda hv'(0)=0$	1
$3<m<4$	$v(0)=0,\ v'(0)=0$	$\min(m-3,\ 4-m)$

Т е о р е м а. а) $\lambda^k(\varepsilon, m) = \lambda^k(m) + O(\varepsilon^{\gamma(m)})$, $\varepsilon \to 0$, *при* $m \leqslant 1$ *и* $k \geqslant 1$;

б) $\lambda^1(\varepsilon, m) = \Lambda^1\varepsilon^{m-1} + o(\varepsilon^{m-1})$, $\varepsilon \to 0$, *при* $m > 1$, *где* Λ^1 — *единственное с. з. задачи* $Lv = 0$ *в* $\Omega\diagdown 0$, $v(a_\pm) = v'(a_\pm) = 0$, $B_1 v = 0$;

в) $\lambda^k(\varepsilon, m) = \lambda^{k-1}(m) + O(\varepsilon^{\gamma(m)})$, $\varepsilon \to 0$, *при* $1 < m \leqslant 3$ *и* $k \geqslant 2$;

г) $\lambda^2(\varepsilon, m) = \Lambda^2\varepsilon^{m-3} + o(\varepsilon^{m-3})$, $\varepsilon \to 0$, *при* $m > 3$, *где* Λ^2 — *единственное с. з. задачи* $Lv = 0$ *в* $\Omega\diagdown 0$, $v(a_\pm) = v'(a_\pm) = 0$, $B_3 v = 0$;

д) $\lambda^k(\varepsilon, m) = \mu^{k-2}\varepsilon^{m-4} + O(\varepsilon^{m-7/2})$, $\varepsilon \to 0$, *при* $m > 4$ *и* $k \geqslant 3$, *а* $\{\mu^k\}_{k=1}^{\infty}$ — *с. з. задачи*

(3) $k_2(0)w^{(IV)} - \mu q(\xi)w = 0$, $\xi \in (-1, 1)$, $w''(\pm 1) = w'''(\pm 1) = 0$, $\mu > 0$;

е) $\lambda^k(\varepsilon, 4) = \nu^{k-2} + O(\varepsilon^{1/2})$, $\varepsilon \to 0$, *при* $k \geqslant 3$, *где* $\{\nu^k\}_{k=1}^{\infty}$ — *с. з. спектральной системы, составленной из задачи* (3) *и задачи* (2) *для* $m \in (3, 4)$.

4. В. Ф. Б у т у з о в, Н. Н. Н е ф е д о в, Е. В. П о л е ж а е в а «Асимптотические решения линеаризованных задач о собственных и вынужденных колебаниях среды с малой вязкостью».

5. С. Г. М и х л и н (Ленинград) «О трудоемкости оценок погрешности решений линейных алгебраических систем».

6. В. З. М е ш к о в (Воронеж) «О поведении на бесконечности собственных функций эллиптических операторов второго порядка».

7. З. С. А л и е в, А. П. М а х м у д о в (Баку) «Нелинейные возмущения спектральных задач для пары операторов и глобальная бифуркация от интервалов».

8. В. А. С а д о в н и ч и й, В. А. Л ю б и ш к и н «Формула следа для оператора Лапласа в круге».

Т е о р е м а. *Пусть* T — *оператор Лапласа в круге* $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon x^2 + y^2 < R^2\}$ *с граничным условием Дирихле. Пусть* P — *оператор умножения на функцию* $g(x, y)$, *удовлетворяющую условиям*: $g(x, y)$ *непрерывна в* $\overline{\Omega}$, *равна нулю в окрестности начала координат и имеет на* $\partial\Omega$ *производную по направлению вектора нормали. Тогда имеет место формула следа*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\mu_{mn} - s_{mn}^{2(1+\varepsilon)} - \frac{1}{2\pi R}\left(1 + \frac{2m}{cn^{3/2}}\right)\iint\limits_{\Omega}\frac{g(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi R}\,\frac{1}{n^{3/2}}\left(1 - \frac{1}{m^{3/2}}\right)\int\limits_{\partial\Omega} g(x, y)\,\partial s\right] = -\frac{c}{2\pi R}\int\limits_{\partial\Omega} g(x, y)\,ds,$$

где μ_{mn} — *собственные значения оператора* $T^{1+\varepsilon} + P(\varepsilon > 0)$, s_{mn} — *корни уравнения* $J_m(sR) = 0$, *где* $J_m(t)$ — *функция Бесселя первого рода порядка* m, *а* $c = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$.

Вечернее заседание 19 января 1988 г., секция 2

1. В. С. Буслаев, Л. А. Дмитриева (Ленинград) «Одномерный кристалл в однородном электрическом поле».

2. А. П. Веселов, О. А. Чалых «Квантовая задача Калоджеро и коммутативные кольца многомерных дифференциальных операторов».

Пусть R — система корней в $\mathbb{R}^n$, R_+ — множество положительных корней системы. Рассматривается функция $\psi(x, k)$, x, $k \in \mathbb{R}^n$, вида $\psi = P(k, x)\exp(k, x)$, где скобки означают инвариантное скалярное произведение, а $P(k, x)$ — многочлен по k со старшим членом $A(k) = \prod\limits_{\alpha\in R_+} (\alpha, k)$. Потребуем, чтобы $\left(\alpha, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)\psi = 0$ на гиперплоскости $(\alpha, k) = 0$ для всех $\alpha \in R_+$. Существует не более одной функции с такими свойствами. Для серии A_n при $n \leqslant 5$ можно предъявить явный вид такой функции, для остальных систем корней имеется лишь гипотеза о его структуре.

Теорема. *Существуют операторы* $L_i\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, *для которых функция* ψ *является собственной:* $L_0\psi = A^3(k)\psi$, $L_i\psi = P_i(k)\psi (i = 1, \ldots, n)$, $P_i(k)$ — *базисные инвариантные многочлены. Эти операторы коммутируют и порождают коммутативное кольцо многомерных алгебраических операторов в смысле* [1].

Оператор L_1, отвечающий простейшему из инвариантов $P_1 = k^2$, имеет вид $L_1 = = \Delta - 2\sum\limits_{\alpha\in R_+} (\alpha, \alpha)(\alpha, x)^{-2}$, т. е. соответствует квантовой задаче Калоджеро — Ольшанецкого — Переломова при специальном значении параметра при потенциале. Можно предложить обобщение приведенной аксиоматики функции ψ, отвечающее значению параметра $n(n + 1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кричевер И. М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений// УМН.— 1977.— Т. 32, вып. 6.— С. 183—208.

3. В. Е. Захаров «О характере особенности в нелинейном уравнении Шрёдингера в критическом случае».

4. С. А. Молчанов, С. Н. Шандарин «Уравнение Бюргерса и сетчатая структура Вселенной».

5. Л. А. Пастур (Харьков) «Оператор Шрёдингера с нелокальным квазипериодическим потенциалом».

6. Ю. А. Семёнов (Киев) «L_p-теория операторов шрёдингеровского типа».

7. А. И. Бобенко, А. Г. Рейман, М. А. Семёнов-Тян-Шанский (Ленинград) «Волчок Ковалевской».

Вечернее заседание 19 января 1988 г., секция 3

1. Ю. М. Березанский, Ю. Г. Кондратьев (Киев) «Бесконечномерные дифференциальные операторы как гамильтонианы квантовых решетчатых систем».

2. А. С. Попелюхин «О локальной разрешимости псевдодифференциальных операторов с двукратными инволютными характеристиками».

Рассмотрим классический псевдодифференциальный оператор $P(x, D)$ в области $\Omega(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$ с вещественным главным символом $p_m(x, \xi)$. Пусть $p_m(x, \xi)$ имеет нуль ровно второго порядка на коническом многообразии $\Lambda = \{(x, \xi) \in T^*\Omega\diagdown 0;\ p_m(x, \xi) = 0\}$ и положителен вне него. Предположим, что Λ удовлетворяет следующим условиям: 1) Λ инволютивно (и, значит, микролокально представляется в виде $\Lambda = \{(x, \xi) \in T^*\Omega\diagdown 0;\ f_j(x, \xi) = = 0,\ j = \overline{1, l}\}$, здесь l — коразмерность Λ, $1 \leqslant l \leqslant n$, f_j — положительно однородные по ξ функции такие, что $\{f_j, f_k\} = 0$, $j, k = \overline{1, l}$, и $\operatorname{rank} \{\operatorname{rad}_{x,\xi} f_j(x, \xi)|_\Lambda\}_{j=\overline{1,l}} = = l$; 2) $0 < \operatorname{rank} \{\operatorname{grad}_\xi f_j(x, \xi)|_\Lambda\}_{j=\overline{1,l}} < n$.

Микролокальные свойства п. д. о. с главным символом, вырождающимся на таком многообразии, зависят от поведения субглавного символа:

$$p^s_{m-1}(x, \xi) = p_{m-1}(x, \xi) + \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 p_m(x, \xi)}{\partial\xi_j\,\partial x_j}$$

(здесь $p_{m-1}(x, \xi)$ — член порядка $m-1$ в разложении символа оператора $P(x, D)$: $p(x, \xi) \sim p_m(x, \xi) + p_{m-1}(x, \xi) + \ldots$).

Т е о р е м а. *Если* $\operatorname{Re} p^s_{m-1}(x, \xi)|_\Lambda \geqslant 0$, *то оператор* $P(x, D)$, *описанный выше, локально разрешим в произвольной точке* $x \in \Omega$, *и выполняется оценка* $\|u\|_{m/2-1} \leqslant C(\omega) \times \|Pu\|_{1-m/2}$ $\forall u \in C_0^\infty(\omega)$, $\omega \ni x$, $C(\omega) = \mathrm{const}$, $C(\omega) \to 0$ *при* $\operatorname{diam}\omega \to 0$.

3. Р. Л. Ш а х б а г я н (Ереван) «Краевые задачи для бесконечномерных псевдодифференциальных операторов».

4. Ю. Б. О р о ч к о «О свойстве самосопряженных операторов, порожденных задачей Коши для волнового уравнения».

5. Б. А. Б у б н о в (Новосибирск) «Многомерные обратные задачи для гиперболических и параболических уравнений».

6. А. А. А н д р я н (Ереван) «Задача Дирихле для систем уравнений составного типа».

Утреннее заседание 20 января 1988 г., секция 1.

1. В. Л. К а м ы н и н «Об оценках скорости сходимости решений краевых задач для параболических уравнений на плоскости».

2. В.Ю. Б е р к у н, В. В. К у ч е р е н к о, В. А. П о п о в «О сходимости многосеточных методов для жестких задач».

3. В. Г. Д а н и л о в, С. Ю. Д о б р о х о т о в, П. Н. Ж е в а н д р о в «Операторные асимптотики в задаче Коши для псевдодифференциальных уравнений и аналоги эффекта Черенкова».

Описание аналогов эффекта Черенкова в слабо неоднородных средах сводится к построению комбинированной по малому параметру h и по гладкости асимптотики решения задачи Коши

$$h^2u_{tt} + P(x, hD, h)\,u = 0, \qquad u|_{t=0} = u_0, \quad u_t|_{t=0} = 0, \tag{1}$$

где $D = -i\partial/\partial x$, $u_0 \in H_{s,h}(\mathbb{R}^n)$ равномерно по $h \in (0, 1]$, $\|u_0\|^2_{s,h} = \int (1 + h^2\xi^2)^s \times |\tilde{u}_0(\xi)|^2\,d\xi$, $\operatorname{supp} u_0 \subset K \Subset \mathbb{R}^n$, P — h-псевдодифференциальный оператор, удовлетворяющий условиям: 1) при $h \to 0$ и фиксированном ξ справедливы асимптотические разложения $P(x, \omega, h) = P_0(x, \omega) + hP_1(x, \omega) + \ldots$, $P_j \in S^{m-j}_{1,0}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\omega)$, $m \leqslant 2$, $h^{-2}P(x, h\xi, h) = A_0(x, \xi) + hA_1(x, \xi) + \ldots$, $A_j \in S^{m_j}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi)$, $m_0 = 2$, $m_j < \infty$, $j \geqslant 1$, главный символ оператора A_0 неотрицателен; 2) $H(x, \xi, \lambda) = \lambda^{-1}\sqrt{P_0(x, \lambda\xi)} \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \{\mathbb{R}^n_\xi \setminus 0\} \times \mathbb{R}^+_\lambda)$, $H(x, \xi, 0) \neq 0$ при $\xi \neq 0$; 3) $P_0(x, \omega) \geqslant c\,|\omega|^{2m-2}$ при $|\omega| > 0$. Эта задача решается методом Маслова (см. [1], введение, § 8, а также [2], [3]).

Т е о р е м а. *Пусть существует слабый предел функции* u_0 *при* $h \to 0$: $w_0 = \operatorname{wlim} u_0$. *Тогда решение задачи* (1) *имеет вид* $u = T_{N,h}u_0 + Ew_0 - T_{N,0}w_0 + o(1)$, *где* $\|o(1)\|_{h,1} \to 0$ при $h \to 0$, $k \to \infty$ *при* $N \to \infty$, $T_{N,h}$ — *равномерный по* h *параметрикс задачи* (1), E — *разрешающий оператор задачи* (1), *в которой оператор* P *заменен на* $h^2 A_0(x, D)$, $T_{N,0}$ — *параметрикс этой задачи*, N *указывает число членов разложения по обратным степеням* $|D|$ *в операторах* $T_{N,h}$, $T_{N,0}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М а с л о в В. П. Операторные методы.— М.: Наука, 1973.

[2] М а с л о в В. П., Д а н и л о в В. Г. Принципы двойственности Понтрягина для вычисления эффекта типа Черенкова в кристаллах и разностных схемах//Труды МИАН.— 1984.— Т. 166.— С. 130—160.

[3] Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н. Нестандартные характеристики и операторный метод Маслова в линейных задачах о неустановившихся волнах на воде//Функцион. анализ и его прил.— 1985.— Т. 19, вып. 4.— С. 43—54.

4. А. Г. Беляев «Об усреднении краевых задач в областях с быстроосциллирующей границей».

Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Для простоты будем полагать, что $\partial\Omega$ — простой замкнутый контур единичной длины. Пусть F: $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ — 1-периодическая гладкая функция. Для $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, положим $\Sigma_\varepsilon = \{x + t\nu(x);\ x \in \partial\Omega,\ 0 < t < \varepsilon F(s(x)/\varepsilon)\}$, $\Omega_\varepsilon = \overline{\Omega} \cup \Sigma_\varepsilon$, где $s(x)$ — длина дуги $\partial\Omega$ от некоторой фиксированной точки $x^0 \in \partial\Omega$ до x, $\nu(x)$ — внешняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке x $\partial\Omega$. Рассмотрим задачу: найти $u \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$ такую, что для любой $v \in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$

$$\int_\Omega \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \varepsilon \int_{\Sigma_\varepsilon} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega fv\,dx, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^2). \tag{1}$$

Пусть $B = \{y_1, y_2;\ y_1 \in (0, 1),\ 0 < y_2 < F(y_1)\}$, $\partial_0 B = \partial B \cap \{y_2 = F(y_1)\}$, $\partial_1 B = \partial B \cap \{y_2 = 0\}$. Рассмотрим вспомогательную задачу: $\Delta w = 0$ в B, $w = 0$ на $\partial_0 B$, $w = 1$ на $\partial_1 B$, w — 1-периодична по y_1. Положим $p = \int_B \frac{\partial w}{\partial y_i} \frac{\partial w}{\partial y_i} dy > 0$. Рассмотрим задачу, «предельную» при $\varepsilon \to 0$ для задачи (1): найти $u^0 \in H^1(\Omega)$ такую, что для любой $v \in H^1(\Omega)$

$$\int_\Omega \frac{\partial u^0}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + p \int_{\partial\Omega} uv\,ds = \int_\Omega fv\,dx.$$

Теорема. *Пусть $f \in C^\alpha(\mathbb{R}^2)$, $0 < \alpha < 1$. Тогда существует такая постоянная K, не зависящая от ε, что* $\| u^0 - u^\varepsilon;\ H^1(\Omega) \| \leqslant K\sqrt{\varepsilon}$.

Исследуется также поведение собственных значений задачи, соответствующей (1), при $\varepsilon \to 0$.

Сходимость u^ε к u^0 в $H^1(\Omega)$ была доказана ранее Дж. Буттаццо и Р. В. Коном.

5. Г. О. Доронин «Об усреднении гиперболических дифференциальных уравнений в перфорированной области».

Исследовалось поведение при $\varepsilon \to 0$ решения $u^\varepsilon(x, t)$ смешанной задачи Дирихле для гиперболического уравнения второго порядка в области $Q_T^\varepsilon = \Omega^\varepsilon \times (0, T)$, где Ω^ε — область в R_x^n с ε-периодическим расположением полостей (см. [1]),

$$a^\varepsilon u_{tt}^\varepsilon - (a_{ij}^\varepsilon u_{x_j}^\varepsilon)_{x_i} = f(x, t) \quad \text{в} \quad Q_T^\varepsilon,\ u^\varepsilon|_{t=0} = u_t^\varepsilon|_{t=0} = u^\varepsilon|_{\partial\Omega \times (0, T)} = 0, \tag{1}$$

где $a^\varepsilon = a(\varepsilon^{-1}x, t)$, $a_{ij}^\varepsilon = a_{ij}(\varepsilon^{-1}x, t)$, $a(y, t)$, $a_{ij}(y, t)$ — гладкие, 1-периодические по y функции, $f \in C^m(\Omega \times [0, T])$, $D_t^k f|_{t=0} = 0\ (k = 0, \ldots, m)$, $D_{x,t}^{\alpha,k} \equiv D_{x_1}^{\alpha_1} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n} D_t^k$, $a(y, t) \geqslant a_0 = \text{const} > 0$. Построено асимптотическое разложение решения задачи (1), и получена оценка

$$\| u^\varepsilon - u^m \|_{H^1(\Omega_\tau^\varepsilon)} \leqslant C_m \varepsilon^m,$$

где постоянная C_m не зависит от ε, $\Omega_\tau^\varepsilon = Q_T^\varepsilon \cap \{t = \tau\}$, $\tau \in (0, T)$,

$$u^m = \sum_{l=0}^m \varepsilon^{l+2} \sum_{|\alpha|+2k=l} \left(N_{\alpha,2k}^0\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + N_{\alpha,2k}^1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right) D^{\alpha,2k} f(x, t),$$

$N_{\alpha,2k}^0(y)$ — 1-периодическое по y решение вспомогательной эллиптической задачи на ячейке, а $N_{\alpha,2k}^1(y)$ — функция типа пограничного слоя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Иосифьян Г. А., Олейник О. А., Шамаев А. С. Об асимптотическом разложении решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений и системы уравнений теории упругости в перфорированных областях//ДАН СССР.— 1985.— Т. 284, № 5.— С. 1062—1066.

6. У. Е. Райтум (Рига) «Аналоги G-сходимости для эллиптических вариационных неравенств».

7. Р. К. Романовский (Омск) «Усреднение гиперболических операторов».

8. А. И. Шнирельман «Асимптотика течения однородной жидкости в сильно неоднородной пористой среде».

Фильтрационное течение вязкой несжимаемой жидкости в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^2$ описывается уравнением $\operatorname{div} k^{-1}\operatorname{grad}\psi = 0$, $\psi|_{\partial G} = \psi_0(x)$, где $\psi(x)$ — функция тока, $k(x)$ — локальная проницаемость. Пусть $k(x) = k_0 e^{N \cdot a(x)}$, где $a(x)$ — фиксированная гладкая функция в G. Изучается асимптотика ψ при $N \to \infty$.

Теорема. *Пусть $a(x)$ — морсовская функция, $x^{(1)}, \ldots, x^{(k)}$ — ее седловые точки в G. Пусть $U_{\pm}^{(j)}$ — неустойчивые сепаратрисы поля* $\operatorname{grad} a(x)$, *идущие из $x^{(j)}$ в соседние точки локального максимума $a(x)$; пусть они делят G на подобласти $G_1, \ldots, G_l$. Тогда для каждого i найдется точка $x_i \in \partial G$ такая, что $\psi(x) \to \psi_0(x_i)$ в G_i при $N \to \infty$.*

Таким образом, при больших N течение состоит из тонких струй, идущих по сепаратрисам поля $\operatorname{grad} a(x)$. Доказательство использует методы работы [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вентцель А. Д., Фрейдлин М. И. Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений.— М.: Наука, 1979.

Утреннее заседание 20 января 1988 г., секция 2

1. Н. Н. Уральцева (Ленинград) «Граничные свойства решений эллиптических и параболических уравнений».

2. А. В. Бабин, М. И. Вишик «Равномерная спектральная асимптотика решений эволюционных уравнений».

Рассматривается эволюционное уравнение вида $\partial_t u = Au$, $u|_{t=0} = u_0$, которое обладает единственным решением $u(t)$, причем $u(t) \in E\ \forall t \geqslant 0$, E — банахово пространство. Этому уравнению отвечает полугруппа $\{S_t\}$, $S_t \colon E \to E$, $S_t u_0 = u(t)$, где траектория $u(t)$ — решение указанной начальной задачи.

Пусть траектория $u(t)$ имеет пределом стационарную точку z при $t \to +\infty$. Предполагается, что: 1) $S_t u$—класса $C^{1+\alpha}$ по u в окрестности точки z; 2) дифференциалы $\{S_t'(z)\}$ образуют линейную полугруппу такую, что спектр σ оператора $S_1'(z)$ разбивается окружностью $|\zeta| = \rho$, $\rho \ll 1$, на две замкнутые непересекающиеся части σ_- и σ_+, $\sigma_- \subset \{|\zeta| < \rho\}$, $\sigma_+ \subset \{|\zeta| > \rho\}$, причем соответствующее σ_+ инвариантное подпространство $E_+(\rho)$ оператора $S_1'(z)$ конечномерно. При этих предположениях существует локально инвариантное многообразие $M_+(\rho)$, касательное в точке z к $E_+(\rho)$ (см. [2]).

Теорема 1. *На многообразии $M_+(\rho)$ существует траектория $\tilde{u}(t)$, $\tilde{u}(t) \in M_+(\rho)$, $\forall\, t \geqslant T$, такая, что $\|u(t) - \tilde{u}(t)\| \leqslant C\rho^t\ \forall t \geqslant T$.*

Заметим, что при уменьшении ρ порядок приближения $\tilde{u}(t)$ к $u(t)$ увеличивается. Это происходит за счет увеличения размерности $M_+(\rho)$. В линейном случае $\tilde{u}(t)$ соответствует конечному отрезку ряда Фурье по собственным векторам оператора A.

Функция $\tilde{u}(t)$ называется *спектральной асимптотикой* для $u(t)$. Теорема 1 применима к полугруппам, порождаемым системами параболических уравнений, двумерной системой Навье — Стокса и другими уравнениями.

В случае, когда у $\{S_t\}$ имеется глобальная функция Ляпунова и все стационарные точки $\{S_t\}$ гиперболические, спектральная асимптотика $\tilde{u}(t)$ существует для любой траектории $u(t) = S_t u_0$. При этом $\tilde{u}(t)$ состоит из конечного числа кусков траекторий $\{S_t\}$, лежащих на конечномерных многообразиях $M_+(\rho_i, z_i)$, где z_i — неподвижные точки $\{S_t\}$ (см. случай $\rho_i = 1$ в [1]). Имеет место

Теорема 2. *Если* $\| u_0 \| \leqslant R$, *то существует спектральная асимптотика* $\tilde{u}(t)$ *для* $u(t) = S_t u_0$, *удовлетворяющая оценке* $\| u(t) - \tilde{u}(t) \| \leqslant C \exp(-\eta t)$, *где* η *зависит от* $\rho_i (i = 1, \ldots, N)$. *При этом если* $\rho_i \to 0$, *то* $\eta \to +\infty$; C *зависит от* R.

Теорема 2 применима к системам параболических уравнений и к гиперболическим уравнениям с диссипацией (см. [2]).

При некоторых ограничениях на $\{S_t\}$ у полугруппы $\{S_t\}$ существует инерциальное многообразие M_+, т. е. конечномерное инвариантное липшицево многообразие, к которому притягиваются траектории $\{S_t\}$ (см. [3]). Справедлива

Теорема 3. *Для любой траектории* $u(t)$ *существует траектория* $\tilde{u}(t)$ *(асимптотика для* $u(t)$*), лежащая на* M_+ $\forall t \geqslant 0$ *и удовлетворяющая оценке* $\| u(t) - \tilde{u}(t) \| \leqslant C \exp(-\gamma t)$ $\forall t \geqslant 0$, *где* $\gamma > 0$, *а* C *зависит лишь от* $\| u(0) \|$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бабин А. В., Вишик М. И. О поведении при $t \to +\infty$ решений нелинейных уравнений, зависящих от параметра//ДАН СССР.— 1987.— Т. 295, № 4.— С. 786—796.
[2] Бабин А. В., Вишик М. И. Неустойчивые инвариантные множества полугрупп нелинейных операторов и их возмущения//УМН.— 1986.— Т. 41, вып. 4.— С. 3—34.
[3] Foias C., Sell G. R., Temam R. Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equation//Univ. of Minnesota, IAM, Preprint series.— 1986.— N 234.— P. 1—62.

3. В. П. Михайлов «О поведении при больших значениях времени решений гиперболического уравнения».

4. Б. Р. Вайнберг «Об убывании локальной энергии во внешних смешанных периодических по t задачах».

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, Ω — внешность криволинейного цилиндра в $\mathbb{R}^{n+1}_{t,x}$, $L = L(t, x, \partial_t, \partial_x)$ — гиперболическая матрица в Ω из операторов порядка не выше m, $\Omega_0 = \Omega \cap \{t = 0\}$, v — решение внешней задачи

$$(1) \qquad \begin{aligned} &Lv = 0, \quad (t, x) \in \Omega, \quad t > 0; \qquad Bv\,|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0; \\ &\partial_t^j v\big|_{t=0} = 0, \; j < m-1; \qquad \partial_t^{m-1} v\,\big|_{t=0} = f \in L_{2,\,\mathrm{com}}(\overline{\Omega}_0). \end{aligned}$$

Теорема. *Пусть n нечетно и выполнены условия:* 1) $L = L_0(\partial_t, \partial_x)$ *при* $|x| \gg 1$, *где матрица* L_0 *однородна (т. е. среда однородна в окрестности бесконечности),* $L_0(0, \partial_x)$ — *эллиптична;* 2) *существует* $T < \infty$ *такое, что* $\partial\Omega$ *и коэффициенты операторов* L *и* B *периодичны по* t *с периодом* T; 3) *задача* (1) *при* $0 < t < T$ *корректна в обычных соболевских пространствах;* 4) *разрывы матрицы Грина задачи* (1) *уходят на бесконечность при* $t \to \infty$.

Тогда существуют комплексные числа k_j *(рассеивающие частоты), целые неотрицательные числа* p_j *и операторы* $A_{j,l}$: $L_{2,\mathrm{com}}(\overline{\Omega}_0) \to C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ *такие, что:* 1) $0 \leqslant \operatorname{Re} k_j < 2\pi/T$, $\operatorname{Im} k_{j+1} \leqslant \operatorname{Im} k_j$, $\operatorname{Im} k_j \to -\infty$ *при* $j \to \infty$; 2) *при всех f функции* $A_{j,l} f$ *периодичны по* t *с периодом* T; 3) *для любых* a, $N < \infty$ *и* $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ *таких, что* $f = 0$ *при* $|x| > a$,

$$(2) \qquad v = \sum_{N \geqslant j \geqslant 0} \; \sum_{p_j \geqslant l \geqslant 0} t^l \exp(-ik_j t) A_{j,l} f + v_N,$$

где при всех $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, β *и некотором* $C = C(a, N, \alpha, \beta)$

$$(3) \qquad |\partial_t^\beta \partial_x^\alpha v_N| \leqslant C \exp(-|\operatorname{Im} k_N|\, t) \|f\|_{L_2(\Omega_0)}, \quad |x| \leqslant a, \; t \to \infty.$$

Если n четно и нуль не является рассеивающей частотой, то в (2) суммирование ведется только по тем j, для которых $\operatorname{Im} k_j \geqslant 0$, а в (3) $\exp(-|\operatorname{Im} k_N|\, t)$ меняется на $t^{1-n-\beta}$.

5. Н. С. Надирашвили «О стабилизации решений нелинейных параболических уравнений».

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$. В области $D = \Omega \times (0, \infty)$ мы будем рассматривать автономные нелинейные параболические уравнения вида

(1) $$u_t = F(x, u, u_{x_i}, u_{x_i x_j}) \text{ в } D,$$

(2) $$u = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, \infty).$$

Будем считать, что выполнены следующие предположения: а) F — гладкая функция своих аргументов; б) уравнение (1) равномерно параболично; в) имеет место априорная оценка: если u — классическое решение задачи (1), (2) в $\Omega \times [0, T]$, то норма $\| u_{xx} \|$ в $C^\alpha(\Omega \times [t, T])$, $0 < t < T$, $\alpha > 0$, оценивается сверху через t и $\sup | u |$ в $\Omega \times [0, T]$.

Пусть $u(t, x)$ — решение задачи (1), (2), определенное в D. Скажем, что решение $u(t, x)$ устойчиво по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого решения $u'(t, x)$ задачи (1), (2), определенного в D, из того, что $|u(0, x) - u'(0, x)| < \delta$ в Ω, следует неравенство $| u(t, x) - u'(t, x) | < \varepsilon$ в D. Скажем, что $u(t, x)$ стабилизируется при $t \to \infty$, если существует предел $\lim u(t, x)$ при $t \to \infty$, равномерный по x.

Теорема 1. *Пусть $u(t, x)$ — равномерно ограниченное и устойчивое по Ляпунову решение задачи* (1), (2), *определенное в D. Тогда $u(t, x)$ стабилизируется при $t \to \infty$.*

В случае $n = 1$ (т. е. Ω — интервал на прямой), теорема 1 допускает существенное уточнение.

Теорема 2. *Пусть $n = 1$ и $u(t, x)$ — равномерно ограниченное решение задачи* (1), (2), *определенное в D. Тогда $u(t, x)$ стабилизируется при $t \to \infty$.*

6. И. Д. Чуешов (Харьков) «Теорема существования сильных решений и аттрактор системы Кармана».

Рассматривается следующая система уравнений:

$$u_{tt} + \varepsilon u_t + \Delta^2 u - [u + f, v + \theta] + \rho_1 u_x + \rho_2 u_y + ku = p(x, y, t),$$
$$\Delta^2 v + [u + 2f, u] = 0, \ (x, y) \in \Omega \subset R^2, \ t > 0,$$
$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad v = \frac{\partial v}{\partial n} = 0 \text{ на } \partial\Omega,$$
$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \ u_t(x, y, 0) = u_1(x, y).$$

Здесь Ω — гладкая ограниченная область в R^2,

$$[u, v] = u_{xx} v_{yy} + u_{yy} v_{xx} - 2u_{xy} v_{xy}.$$

Функции $f(x, y)$, $\theta(x, y, t)$, $p(x, y, t)$ заданы, $\varepsilon > 0$, ρ_1, ρ_2, k — параметры. Доказана глобальная теорема существования сильных решений, усиливающая локальный результат, установленный в 1966 г. Н. Ф. Морозовым. В автономном случае эта теорема позволяет построить эволюционную группу S_t, действующую в пространстве $(H_0^2(\Omega) \cap H^4(\Omega)) \times H_0^2(\Omega)$. При достаточно больших $\varepsilon > 0$ доказывается существование и конечномерность максимального аттрактора группы S_t. Используются идеи и результаты, принадлежащие А. В. Бабину, М. И. Вишику, О. А. Ладыженской.

7. А. А. Григорьян (Волгоград) «О лиувиллевых теоремах для уравнения $\Delta u - Q(x)u = 0$ на римановых многообразиях».

Пусть M — связное гладкое некомпактное полное риманово многообразие, $Q(x) \in C(M)$, $Q \geqslant 0$, $Q \not\equiv 0$. Пусть $O \in M$, B_R — шар радиуса R с центром в точке O, $V(R) = \mathrm{Vol}\, B_R$,

$$q(R) = \min_{\partial B_R} Q(x), \quad F(R) = \int_0^R \sqrt{q(r)}\, dr.$$

Теорема 1. *Если для некоторой последовательности $R_n \to \infty$*

(1) $$V(2R_n) \leqslant CR_n^2 \exp(CF(R_n)^2),$$

то уравнение

(2) $$\Delta u - Q(x)u = 0$$

имеет на M единственное ограниченное решение $u = 0$.

Теорема 2. *Пусть при достаточно больших R и некотором $C > 0$ выполняются условия $V(R) \leqslant \exp v(R)$, $q(R) \geqslant C^{-1}v'(R)/f(R)$, где $v(R)$, $f(R)$ — гладкие положительные монотонно возрастающие функции такие, что $\int\limits_0^\infty \frac{dr}{f(r)} = \infty$, $0 < \frac{v'}{v} \leqslant C$, $(fv')' \geqslant 0$. Тогда уравнение* (2) *имеет на M единственное ограниченное решение $u = 0$.*

Теорема 3. *Пусть уравнение* (2) *имеет единственное ограниченное на M решение $u = 0$. Тогда если $w \geqslant 0$ — супергармоническая функция на M, $w \in L^1(M, Q(x)dx)$, то* $w \equiv \mathrm{const}$.

Теорема 4. *Пусть выполняется условие* (1). *Тогда уравнение $\Delta u + Q(x)u = 0$ не имеет ограниченного отделенного от нуля решения на M.*

Все теоремы сохраняют силу, если многообразие M имеет край, а рассматриваемые решения удовлетворяют на краю условию Неймана.

Утреннее заседание 20 января 1988 г., секция 3

1. Е. А. Горин «Положительно определенные дробно-двучленные функции».

2. М. Я. Житомирский (Харьков) «Особенности и нормальные формы нечетномерных уравнений Пфаффа».

Первые встречающиеся особенности общего положения уравнения Пфаффа $\omega = 0$ ($\omega \in \Omega^1(M)$, M — многообразие, $\dim M = n = 2k + 1 \geqslant 3$) реализуются в точках множества $S \subset M$ вырождения n-формы $\omega \wedge (d\omega)^k$, $\operatorname{codim} S = 1$. В общих точках S росток уравнения Пфаффа устойчив и эквивалентен нормальной форме $\omega_0 + x_1^2 dz = 0$, $\omega_0 = dy_1 + x_2 dy_2 + \ldots + x_k dy_k$ (Мартине, 1970). Следующие особенности имеют коразмерность 3. Приведенные ниже результаты относятся к C^∞-категории — классифицируются ростки, представляющие особенности коразмерности 3 (при $n = 3$ — всевозможные особенности).

Пусть $S_1 \subset S$ — множество точек, в которых двумерное ядро $(n - 2)$-формы $\omega \wedge (d\omega)^{k-1}$ касается S, $\operatorname{codim} S_1 = 3$ (в M). При $n \geqslant 5$ особенности коразмерности 3 реализуются только в точках S_1, при $n = 3$ — также в точках $S_2 \subset S$, где ω обращается в 0.

Теорема. *Росток общего положения уравнения Пфаффа в общих точках S_1 устойчив при $n \geqslant 5$ и унимодален при $n = 3$. Необщие точки образуют множество коразмерности 4. При $n = 3$ в точках S_2 росток унимодален относительно C^k-эквивалентности (любое $k < \infty$). Инвариантные нормальные формы: при $n \geqslant 5$ в общих точках S_1: $\omega_0 + x_1(y_2 + x_1^2 \pm z^2)dz = 0$; при $n = 3$ в точках S_1: $dy + x(y + x^2 \pm z^2 + bx^2z^2)dz = 0$; при $n = 3$ в точках S_2: $2x\,dy + d(z^2 - xy - \lambda(x^2 + y^2)) = 0$ и $x\,dy + d(z^2 - \lambda xy) = 0$, где b, λ — модули. Все устойчивые ростки за пределами случаев Дарбу и Мартине эквивалентны указанной модели при $n \geqslant 5$.*

3. Г. Р. Белицкий (Харьков) «О препятствиях к конечногладкой линеаризации».

4. А. А. Давыдов (Владимир) «Зоны нелокальной транзитивности управляемых систем».

5. А. М. Вершик, В. Я. Гершкович (Ленинград) «Оценка числа функциональных модулей пространства орбит ростков распределений».

Рассмотрим W_n^k — пространство ростков в $0 \in \mathbb{R}^n$ распределений размерности k и будем изучать их орбиты под действием группы ростков диффеоморфизмов бесконечной гладкости.

Теорема. *Если $(k, n) \neq (2, 4)$ и $1 < k < n - 1$, то пространство орбит общего положения в W_n^k параметризуется не менее чем $k(n - k) - n$ функциями от n переменных, в частности, любая орбита имеет бесконечную коразмерность.*

Кроме хорошо известных исключений $k = 1$, $k = n - 1$, где имеется одна орбита общего положения, есть еще одно менее известное, но открытое еще Энгелем: $k = 2$, $n = 4$

$$\xi_1 = \partial/\partial x_1;\ \xi_2 = \partial/\partial x_2 + x_1 \partial/\partial x_3 + x_3 \partial/\partial x_4.$$

Случай $k = 8$, $n = 11$ рассмотрен А. Н. Варченко.

Более точная формулировка результата использует вводимое понятие струйной асимптотической размерности, которое позволяет измерять размерность в более гибкой шкале, чем количество функциональных модулей и число переменных в них. Предлагаемый метод позволяет вычислять также асимптотическую коразмерность орбит для различных подмножеств пространства W_n^k, заданных естественными ограничениями. Примером служит следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $W_{n,2}^k$ — пространство тех ростков распределений из W_n^k, у которых существует росток двумерной интегральной поверхности. Тогда, если $k < n-1$ и $(k, n) \neq (3, 5)$, то коразмерность орбиты общего положения в $W_{n,2}^k$ бесконечна.*

6. А. Н. Шошитайшвили «Управление качественным поведением динамических систем».

Рассмотрим две системы дифференциальных уравнений, зависящие от одних и тех же параметров ε: систему

$$\dot{z} = w(z, \varepsilon), \quad \dot{\varepsilon} = \omega(\varepsilon) \tag{1}$$

$$(z \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon \in \mathbb{R}^m,\ (w, \omega) \in C^2(z, \varepsilon),\ w(0) = 0,\ \omega(0) = 0),$$

и систему с управлением u

$$\dot{x} = Ax + Bu + v_2(x, \varepsilon, u), \quad \dot{\varepsilon} = \omega(\varepsilon) \tag{2}$$

($x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^1$, $v_2 \in C^2(x, \varepsilon, u)$, $v_2(0) = 0$, $\partial_x v_2(0) = 0$, A, B — постоянные линейные операторы).

Теорема. *Утверждение «для почти всех систем (1) существует росток C^1-функции $U^*(x, \varepsilon)$, $U(0, 0) = 0$, такой, что при $u = u^*(x, \varepsilon)$ росток в точке $x = 0$, $\varepsilon = 0$ системы (2) C^1-диффеоморфен ростку в точке $z = 0$, $\varepsilon = 0$ системы (1)» эквивалентно утверждению «выполнено условие*

$$\operatorname{Rang}[B, A, B, \ldots, A^{n-1}B] = n». \tag{3}$$

Управление $u^*(x, \varepsilon)$ ищется в виде $u(z(x, \varepsilon))$, где $u(z)$ — некоторая функция, а $z(x, \varepsilon)$ находится из условия $x = F(z, \varepsilon)$, задающего интегральное многообразие системы (1), (2) при $u = u(z)$. Если (3) выполнено, то $(\varepsilon, z) \mapsto (\varepsilon, F(z, \varepsilon))$ диффеоморфизм. Если (3) нарушено, но $(\varepsilon, z) \mapsto (\varepsilon, F(z, \varepsilon))$ — эпиморфизм, то $z(x, \varepsilon)$ многозначно и управлять качественным поведением можно многозначным управлением $u(z(x, \varepsilon))$. Подбирая систему (1) и строя $u^*(x, \varepsilon)$, можно в (2) получать аттракторы требуемой природы.

7. Ю. М. Барышников «О перестройках множеств негладкости функции Беллмана».

8. В. Г. Тураев «Инварианты зацеплений и уравнение Янга — Бакстера».

Вечернее заседание 20 января 1988 г., секция 1

1. М. В. Сафонов (Владимир) «О проблеме $C^{1+\alpha}$-гладкости решений линейных эллиптических уравнений с измеримыми коэффициентами».

2. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник «О краевых задачах для системы теории упругости».

Рассматривается задача Дирихле в неограниченной области $\Omega = R^n \setminus M$ для системы теории упругости

$$L(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x_h}\left(a_{kh}^{ij}(x)\frac{\partial u_j}{\partial x_h}\right) = f_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad u = (u_1, \ldots, u_n),$$

с граничным условием $u = 0$ на $\partial\Omega$, где $a_{kh}^{ij} = a_{hk}^{ji} = a_{hj}^{ih}$, $\varkappa_1 |\eta|^2 \leqslant a_{kh}^{ij}(x)\eta_k^i\eta_h^j \leqslant \varkappa_2 |\eta|^2$, $\varkappa_1, \varkappa_2 = \text{const} > 0$, $\eta_j^i = \eta_i^j$, $|\eta|^2 = \eta_k^i\eta_k^i$. Здесь и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам от 1 до n; a_{kh}^{ij} — ограниченные измеримые функции в Ω. Обозначим

$$E(u, \Omega) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 dx, \quad D(u, \Omega) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2 dx.$$

Изучается вопрос о единственности обобщенного решения задачи Дирихле в Ω в предположении, что либо $E(u, \Omega) < \infty$, либо $D(u, \Omega) < \infty$. Введем понятие g-емкости множества M, где g — вектор-функция из класса $C^1(R^n)$. Если M — ограниченное замкнутое множество, то

$$\operatorname{cap}_g M = \inf_u \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx,$$

где $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и имеет компактный носитель, $u = g$ в окрестности M. Если M — произвольное множество в $\mathbb{R}^n$, то $\operatorname{cap}_g M = \sup \operatorname{cap}_g m$, где sup берется по всем замкнутым ограниченным множествам m таким, что $m \subset M$.

Теорема. *Пусть $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus M$, $\operatorname{cap}_g M \neq 0$ при $g = (1, \ldots, 1)$, т. е. емкость Винера M больше нуля. Размерность пространства решений задачи Дирихле $L(u) = 0$ в Ω, $u = 0$ на $\partial\Omega$, для которых $E(u, \Omega) < \infty$, равна при $n \geqslant 3$ размерности пространства вектор-функций вида $g = Ax + B$ таких, что $\operatorname{cap}_g M < \infty$, где A — постоянная кососимметрическая матрица, B — постоянный вектор. При $n = 2$ размерность пространства решений этой задачи с $E(u, \Omega) < \infty$ равна 2, если $\operatorname{cap}_g M < \infty$, и решение единственно, если $\operatorname{cap}_g M = \infty$, где $g = (-x_2, x_1)$.*

Размерность пространства решений однородной задачи Дирихле с $D(u, \Omega) < \infty$ равна n, если $\operatorname{cap}_g M < \infty$, и решение единственно, если $\operatorname{cap}_g M = \infty$, где $g = (1, \ldots, 1)$, $n \geqslant 3$. Если $n = 2$, то решение задачи Дирихле единственно при $D(u, \Omega) < \infty$.

Для широких классов областей Ω получены оценки для $\operatorname{cap}_g M$ и тем самым установлены теоремы единственности решения задачи Дирихле в предположениях геометрического характера на $\partial\Omega$.

3. А. И. Кошелев, В. М. Чистяков (Ленинград) «О регулярности решений некоторых задач гистерезисного типа».

4. Е. М. Ландис «Теорема о трех шарах для некоторых полулинейных уравнений и ее приложения».

5. В. А. Козлов (Ленинград) «О краевых эллиптических задачах в областях с ребрами на границе».

6. Т. О. Шапошникова (Ленинград) «О коэрцитивности в L_p задачи Неймана в области с негладкой границей».

Изучается задача

$$(1) \qquad \frac{\partial}{\partial z_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial z_j}\right) = f \text{ в } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad a_{ij}\frac{\partial u}{\partial z_j}\cos(\nu, z_i) = g \text{ на } \partial\Omega$$

для эллиптического уравнения с негладкими коэффициентами и границей $\partial\Omega$.

Пусть MW_p^s — пространство мультипликаторов в W_p^s, $1 < p < \infty$, $s > 0$. Предполагается, что $\partial\Omega$ локально задается уравнением $y = \varphi(x)$, причем при $p(l-1) \leqslant n$ норма $\| \nabla\varphi; \mathbb{R}^{n-1} \|_{MW_p^{l-1-1/p}}$ мала, а при $p(l-1) > n$ норма $\| \varphi; R^{n-1} \|_{W_p^{l-1/p}}$ конечна.

Теорема. *Пусть коэффициенты a_{ij} имеют локально малое изменение и малые существенные нормы $\operatorname{ess} \| \nabla a_{ij}; \Omega \|_{M(W_p^{l-1} \to W_p^{l-2})}$, $l \geqslant 2$. Тогда задача (1) имеет одно и только одно решение (с точностью до постоянного слагаемого) в $W_p^l(\Omega)$ при всех $f \in W_p^{l-2}(\Omega)$, $g \in W_p^{l-1-1/p}(\partial\Omega)$, удовлетворяющих условию ортогональности, и*

$$\| u; \Omega \|_{W_p^l} \leqslant c\left(\| f; \Omega \|_{W_p^{l-2}} + \| g; \partial\Omega \|_{W_p^{l-1-1/p}}\right).$$

Доказана теорема о фредгольмовости задачи Неймана для общего эллиптического уравнения второго порядка при тех же предположениях о $\partial\Omega$ и a_{ij} и соответствующих условиях на младшие коэффициенты, формулируемые в терминах мультипликаторов.

Приводятся более легко проверяемые достаточные условия на коэффициенты и границу $\partial\Omega$, улучшающие известные.

7. М. В. Борсук (Белгород) «Поведение решения задачи Дирихле для квазилинейного параболического уравнения второго порядка вблизи конической и угловой точек».

Вечернее заседание 20 января 1988 г., секция 2

1. И. И. Данилюк, М. В. Олейник (Донецк) «Об одной обратной квазистационарной задаче Стефана».

2. В. М. Кирилич (Львов) «О задачах типа Дарбу — Стефана для гиперболических уравнений».

3. Е. В. Радкевич «Условия существования классического решения контактной задачи Стефана».

4. С. Н. Кружков «Разрывные решения некоторых существенно нелинейных уравнений первого порядка».

Устанавливаются теоремы нелокальной обобщенной разрешимости задачи Коши для уравнений вида $u_t + a(u)u_x^2 = 0$ с начальным условием $u(0, x) = u_0(x)$. В конкретном, но характерном случае $a(u) \equiv -u$ основные результаты состоят в следующем.

Пусть $u_0(x)$ — ограниченная непрерывная функция на R^1. Существует и единственно решение $u(t, x)$ рассматриваемой задачи Коши, являющееся ограниченной, непрерывной почти всюду в $\Pi_+ = \{(t, x): t > 0, x \in R^1\}$ функцией такой, что: 1) функция — $u^2(t, x)$ совпадает с обобщенным (локально непрерывным по Липшицу) решением $v(t, x)$ задачи Коши $v_t + (v_x^2/2) = 0$, $v(0, x) = -u_0^2(x)$ в смысле определения из § 3 в [1]; 2) функция $u(t, x)$ непрерывна во всех точках существования $v_x(t, x)$; 3) $u(t, x) \to u_0(x_0)$ при $(t, x) \to (0, x_0)$. Это решение может быть получено как предел при $\varepsilon \to +0$ решений $u^\varepsilon(t, x)$ задачи Коши $u_t^\varepsilon - u^\varepsilon(u_x^\varepsilon)^2 = \varepsilon u_{xx}$, $u^\varepsilon(0, x) = u_0(x)$ для почти всех $(t, x) \in \Pi_+$. Исследован также вопрос о стабилизации решения $u(t, x)$ при $t \to \infty$ Изложенные в докладе результаты получены совместно с А. П. Коршиковым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными. II//Мат. сб.—1967.— Т. 72, № 1.— С. 108—134.

5. С. Н. Антонцев (Новосибирск) «Метастабильная локализация решений параболических уравнений общего вида».

6. К. А. Ягджян (Ереван) «Необходимые условия корректности задачи Коши для уравнений с характеристиками, слипающимися с бесконечной скоростью».

7. И. Е. Егоров (Якутск) «Краевые задачи для уравнения смешанного типа высокого порядка».

8. А. Н. Агаджанов «Стохастические нелинейные уравнения бесконечного порядка и соответствующие функциональные пространства».

Вечернее заседание 20 января 1988 г., секция 3

1. К. Г. Валеев (Киев) «Моделирование немарковских случайных процессов».

2. Н. И. Вулпе, И. В. Николаев «Комитанты и типы особых точек квадратичной дифференциальной системы».

3. И. Т. Кигурадзе (Тбилиси) «О существовании периодических решений систем нелинейных дифференциальных уравнений».

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\frac{du_k}{dt} = f_k(t, u_1, u_2) \qquad (k=1, 2), \tag{1}$$

где функции f_k: $R^3 \to R$ $(k = 1, 2)$ удовлетворяют локальным условиям Каратеодори и периодичны по первому аргументу с периодом $\omega > 0$.

Теорема. *Пусть на множестве* $[0, \omega] \times R^2$ *соблюдаются неравенства*

$$f_k(t, u_1, u_2)u_{3-k} \geqslant g_k(t, |u_{3-k}|) - g_0(t) \quad (k = 1, 2),$$

где g_0: $[0,\ \omega] \to [0,\ +\infty[$ — *интегрируемая по Лебегу функция, а функции* g_k: $[0,\ \omega] \times [0,\ +\infty[\to [0,\ +\infty[$ $(k = 1,\ 2)$ *интегрируемы по первому аргументу, не убывают по второму аргументу и*

$$\lim_{\rho\to+\infty} \int_0^\omega g_k(t,\ \rho)\,dt = +\infty \qquad (k = 1,\ 2).$$

Пусть, кроме того, существуют положительные числа δ *и* l *такие, что для каждого* $k \in \{1,\ 2\}$ *имеем*

$|f_k(t,\ u_1,\ u_2)| \leqslant [g_0(t) + l\,|f_{3-k}(t,\ u_1,\ u_2)u_k|](1 + |u_k|)]$ *при* $t \in [0,\ \omega]$, $u_k \in R$, $|u_{3-k}| \leqslant \delta$. *Тогда система* (1) *имеет хотя бы одно* ω*-периодическое решение.*

4. А. Ф. Корзюк, А. И. Яблонский (Минск) «О построении классов систем нелинейных дифференциальных уравнений произвольного порядка с подвижными однозначными особенностями».

5. Ю. Д. Латушкин (Одесса) «Операторы взвешенного сдвига, спектральная теория косых произведений и мультипликативная эргодическая теорема» (результаты получены совместно с А. М. Стёпиным).

Пусть τ — гомеоморфизм компакта X с плотным множеством непериодических точек; μ — квазиинвариантная мера с непрерывной производной $\gamma = d\mu\tau^{-1}/d\mu$; G: $X \times \mathbb{Z} \to GL_m$ — непрерывный коцикл над τ; π — косое произведение τ на $G(x,\ \cdot)$; E — множество τ-эргодических мер; λ_ν^j — показатели Ляпунова коцикла G, $\mathbb{R}^m = \oplus W_{x,\nu}^j$, $j = \overline{1,\ s_\nu}$, $\nu \in E$ — отвечающее им разложение (существующее по мультипликативной эргодической теореме) на множестве полной ν-меры $X_\nu \subset X$; V_k, $\Sigma(\cdot)$ — спектральные подпространства и динамический спектр косого произведения $(\cdot)$; $(Tf)(x) = \gamma^{1/2}(x) \times G(\tau^{-1}x,\ 1)f(\tau^{-1}x)$ — оператор взвешенного сдвига в $L_2(X,\ \mu;\ \mathbb{R}^m)$; $\{\exp r_k^- \leqslant |z| \leqslant \exp r_k^+\}$ — кольца, составляющие спектр оператора T; $P_k = P_k(x)$ — соответствующие проекторы Рисса, являющиеся операторами умножения на непрерывные проекторнозначные функции, $k = \overline{1,\ N}$, $N \leqslant m$, $x \in X$.

Теорема. *Для каждой* $\nu \in E$ *найдутся* $i_1 = 1 < i_2 < \ldots < i_{N+1} = s_\nu + 1$, *для которых при* $k = \overline{1,\ N}$ *выполнено*: $\operatorname{Im} P_k(x) = \oplus W_{x,\nu}^j = V_k$, $x \in X_\nu$; $\lambda_\nu^j \in [r_k^-,\ r_k^+]$; $r_k^- = \inf\{\lambda_\nu^j\colon\ \nu \in E\}$, $r_k^+ = \sup\{\lambda_\nu^j\colon\ \nu \in E\}$, $i_k \leqslant j < i_{k+1}$; $\Sigma(\pi\,|\,\{(x,\ v)\colon\ x \in X,\ v \in \operatorname{Im} P_k(x)\}) = [r_k^-,\ r_k^+]$.

Следствие. *Гиперболичность* π *(оператора* T*) эквивалентна условиям:* 1) $\|G(x,\ n)v\| < \infty$ *при* $n \in \mathbb{Z}$ *влечет* $v = 0$; 2) *множество* $\{\lambda_\nu^j\colon\ j = \overline{1,\ s_\nu},\ \nu \in E\}$ *отделено от нуля*; 3) $\dim\{\oplus\ W_{x,\nu}^j\colon\ \lambda_\nu^j > 0\}$ *не зависит от* $\nu \in E$.

6. С. Ю. Пилюгин (Ленинград) «Предельные множества траекторий областей в динамических системах».

Пусть M — гладкое замкнутое многообразие, $F(M)$ — пространство непрерывных потоков на M с C^0-топологией. Для области $G \subset M$ определяется ω-предельное множество под действием потока φ:

$$\omega(G) = \{\lim_{k\to\infty} \varphi(t_k,\ x_k)\colon\ \underset{k\to\infty}{t_k \to +\infty},\ x_k \in G\}.$$

Пусть $D_r(x)$ — открытый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in M$.

Теорема 1. *Типичный поток* $\varphi \in F(M)$ *обладает следующим свойством: для любой точки* $x \in M$ *найдется множество* II *категории по Бэру* $B(x) \subset (0,\ +\infty)$ *такое, что для* $r \in B(x)$ *множество* $\omega(D_r(x))$ *устойчиво по Ляпунову.*

Теорема 2. *Пусть порок* φ *порождается системой дифференциальных уравнений класса* C^1, *удовлетворяющей аксиоме* A *и строгому условию трансверсальности. Тогда для любой точки* $x \in M$ *найдется конечное множество* $B_1(x)$ *такое, что для* $r \in (0,\ +\infty) \setminus B_1(x)$ *множество* $\omega(D_r(x))$ *асимптотически устойчиво.*

7. М. Н. Попа, К. С. Сибирский (Кишинев) «Условия наличия неоднородного линейного частного интеграла дифференциальной системы с квадратичными нелинейностями».

8. Л. Э. Рейзинь (Рига) «Многолистность области определения решения уравнения Пфаффа».

Утреннее заседание 21 января 1988 г., секция 1

1. А. К. Гущин «О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка».

2. В. А. Солонников (Ленинград) «Сведение начально-краевых задач для системы Стокса к начально-краевым задачам для параболических псевдодифференциальных уравнений».

3. Н. В. Житарашу (Кишинев) «О предельных значениях на границе обобщенных решений параболических уравнений и систем».

4. М. О. Отелбаев (Алма-Ата) «Существование сильного решения абстрактного параболического нелинейного уравнения».

5. Н. М. Бокало (Львов) «О задаче без начальных условий для одного класса эволюционных уравнений».

6. В. Н. Врагов (Новосибирск) «Нелокальные задачи для систем параболических уравнений».

7. А. И. Кожанов (Новосибирск) «Оценки решений для линейных и нелинейных эллиптических и параболических уравнений высокого порядка».

Утреннее заседание 21 января 1988 г., секция 2

1. И. В. Волович «p-адические струны».

2. Ф. Ф. Воронов «Преобразование Фурье, интегральная геометрия и методы суперматематики».

3. А. В. Зорич «Касательное двойное расслоение и линеаризация в задачах интегральной геометрии».

Рассмотрим многообразие M и три последовательно вложенных векторных расслоения на нем $\nu_1 \subset \nu_2 \subseteq \varepsilon^m$, где ε^m— тривиализованное векторное расслоение. Диаграмму вида

(1) $$\mathbb{R}^m \leftarrow (M, \nu_2) \rightarrow (M, \nu_2/\nu_1)$$

будем называть *линейным двойным расслоением*. Здесь левая стрелка — композиция вложения $(M, \nu_2) \subseteq (M, \varepsilon^m) = M \times \mathbb{R}^m$ и проекции $M \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Рассмотрим интегральное преобразование $\mathcal{J}$, отвечающее нашему линейному двойному расслоению: $\mathcal{J}\colon \mathcal{S}(\mathbb{R}^m) \to C^\infty((M, \nu_2/\nu_1))$.

Вложение $\nu_1^s \subset \varepsilon^m$ определяет обобщенное гауссово отображение $M \to G_s(\mathbb{R}^m)$, а также соответствующее отображение касательных расслоений $(M, \tau)\colon = TM \to TG_s(\mathbb{R}^m) = (G_s(\mathbb{R}^m), \operatorname{Hom}(\gamma^s, \varepsilon^m/\gamma^s))$, где γ^s — тавтологическое расслоение над многообразием Грассмана. Тем самым определяется сечение δ расслоения $\operatorname{Hom}(\tau \otimes \nu_1, \varepsilon^m/\nu_1)$ над базой M. Сечение δ в свою очередь задает сечение $\delta^{(s)}$ расслоения $\operatorname{Hom}(\Lambda^s(\tau) \otimes \Lambda^s(\nu_1), S^s(\varepsilon^m/\nu_1))$ (здесь Λ — внешняя, а S — симметрическая степень расслоения). Подрасслоение (возможно, сингулярное) $\operatorname{Im} \delta^{(s)} \subset S^s(\varepsilon^m/\nu_1)$ будем называть *s-м дифференциалом расслоения* ν_1 относительно вложения $\nu_1 \subset \varepsilon^m$. Отметим, что расслоение $S^s(\nu_2/\nu_1)$ вложено в расслоение $S^s(\varepsilon^m/\nu_1)$.

Теорема. *Если характеристический класс Эйлера расслоения ν_1 отличен от нуля, и s-й дифференциал расслоения ν_1 содержится в расслоении $S^s(\nu_2/\nu_1)$, то интегральное преобразование $\mathcal{J}$, отвечающее двойному расслоению (1), обратимо в начале координат, т.е. значение $f(0)$ прообраза $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ преобразования $\mathcal{J}$ восстанавливается по образу $\mathcal{J}f \in C^\infty((M, \nu_2/\nu_1))$. Формула обращения эффективна.*

4. Н. Х. Ибрагимов «Нелокальные симметрии уравнений газовой динамики».

5. Ю. М. Воробьёв, М. В. Карасёв «Глобальные решения уравнений со скобками Схоутена».

Пусть пуассоново многообразие $\mathcal{N}$ тривиально расслоено своими симплектическими листами Ω. Пусть скобка на $\mathcal{N}$ задается 2-тензором Ψ и $D(\cdot) = [\Psi, \cdot]$ — оператор [1], порожденный скобками Схоутена $[\cdot, \cdot]$, $D\colon M^k \to M^{k+1}$ — комплекс пространств антисимметричных контравариантных тензорных полей на $\mathcal{N}$ (k — ранг), $\mathcal{L}^k$ и $\mathcal{H}^k$ — его коциклы и когомологии. Пусть $v_1, \ldots, v_r$ набор векторных полей на $\mathcal{N}$, дуальный некоторому базису функций Казимира. Тогда на каждом листе Ω корректно определены 2-формы $\omega_j(X, Y) = \langle \Psi^{-1}D(v_j)\Psi^{-1}X, Y\rangle$, $X, Y \in T\Omega$. Обозначим через $\Lambda_{q,p}$ пространство q-форм на Ω со значениями в антисимметричных тензорных полях на $\mathcal{N}/\Omega$ ранга p. Оператор δ: $\Lambda_{q,p+1} \to \Lambda_{q+2,p}$ зададим формулой $(\delta\theta)^{i_1,\ldots,i_p} = \theta^{i_1,\ldots,i_p,j} \wedge \omega_j$. Он действует также на прямой сумме $\Lambda^k = \bigoplus_{q+p=k} \Lambda_{q,p}$, δ: $\Lambda^k \to \Lambda^{k+1}$. Определим R: $\Lambda^k \to M^k$ формулой

$$R(\theta) = \sum_{0 \leqslant m \leqslant k} \frac{(-1)^m}{m!} v_{i_1} \wedge \ldots \wedge v_{i_m} \wedge \Psi\theta_{k-m,m}^{i_1,\ldots,i_m},$$

где $\theta = \theta_{0,k} + \theta_{1,k-1} + \ldots + \theta_{k,0}$ — разложение в прямую сумму компонент $\theta_{q,p} \in \Lambda_{q,p}$.

Теорема 1. *Пространство коциклов $\mathcal{Z}^k$ состоит из тензоров вида $R(\theta) + D(A)$, где $A \in M^{k-1}$, а $\theta \in \Lambda^k$ удовлетворяет уравнению $(\delta - d)\theta = 0$. Здесь d — обычный дифференциал форм на Ω.*

Теорема 2. *$\mathcal{H}^k = \mathrm{Ker}(\delta - d)/\mathrm{Im}(\delta + d)$, где ядро и образ рассматриваются как подпространства в Λ^k.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Lichnerowicz A. Les varietés de Poisson et leurs algebres de Lie associees// J. Diff. Geom.—1977.—V. 12, N 12.— P. 253—300.

6. В. С. Дрюма (Кишинев) «О проективных свойствах пары полей направлений в трехмерном пространстве».

7. А. Ю. Хренников «Псевдодифференциальные уравнения в функциональном суперанализе».

Утреннее заседание 21 января 1988 г., секция 3

1. О. А. Олейник, Т. С. Соболева «О собственных колебаниях неоднородной струны с конечным числом присоединенных масс».

Рассматривается задача Штурма — Лиувилля на отрезке $[a, b]$ вида

$$(1)\qquad (p(x)u')' + \lambda\left(\rho(x) + \sum_{j=1}^{N} \varepsilon^{-m_j}\chi_j\left(\frac{x-a_j}{\varepsilon}\right)\right)u = 0,\ u(a) = u(b) = 0,$$

$a < a_1 < \ldots < a_N < b$, λ — спектральный параметр, $0 < \chi_j(\xi) \leqslant 1$ при $|\xi| < 1$ и $\chi_j(\xi) = 0$ при $|\xi| \geqslant 1$, ε — малый параметр, $p(x) \geqslant p_0$, $\rho(x) \geqslant \rho_0$, $p_0, \rho_0 = \mathrm{const} > 0$, $m_j \in R^1$, p, ρ — гладкие функции. Пусть u_k^ε, λ_k^ε — собственная функция и соответствующее собственное значение задачи (1). Изучается поведение λ_k^ε и u_k^ε при $\varepsilon \to 0$. Если $m_j > 2$ при некотором j, то $\lambda_k^\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и любом k. Если $m_j > 1$ при некотором j, то $\lambda_1^\varepsilon \to 0$. Пусть $m_j < 2$ при всех j, $m_j < 1$ при $j \in I_1 \equiv [N_1, N_2]$, $m_j = 1$ при $j \in I_2 \equiv [N_3, N_4]$, $1 < m_j < 2$ при $j \in I_3 \equiv [N_5, N_6]$ (некоторые I_j могут быть пусты). Пусть λ_k — собственное значение задачи

$$(2)\qquad \begin{cases} (p(x)u')' + \lambda\left(\rho(x) + \sum\limits_{j=N_3}^{N_4} M_j\delta(x-a_j)\right)u = 0,\ M_j = \int\limits_{-1}^{1} \chi_j(\xi)\,d\xi, \\ u(a) = u(b) = 0,\ u(a_{N_5}) = \ldots = u(a_{N_6}) = 0,\ \delta(x) \text{ — функция Дирака}. \end{cases}$$

Тогда $\lambda_k^\varepsilon \to \lambda_k$, если все $m_j \leqslant 1$, и $\lambda_{k+1}^\varepsilon \to \lambda_k$, $k \geqslant 1$, если $m_j > 1$ при некотором j. Пусть $m_j \leqslant 2$, $m_j = 2$ при $j \in I_4 = [N_7, N_8]$, I_4 не пусто. Тогда $\lambda_{k+1}^\varepsilon \to \lambda_k$, где λ_k — собственное значение либо задачи (2) с дополнительным условием $u(a_{N_7}) = \ldots = u(a_{N_8}) = 0$, либо задачи $(p(a_j)u')' + \lambda\chi_j(x)u = 0$, $u'(1) = u'(-1) = 0$, $\lambda \neq 0$, $j \in I_4$.

Изучена также задача для уравнения (1) с граничными условиями $u'(a) = u(b) = 0$ и $u'(a) = u'(b) = 0$. Случай $N = 1$ рассмотрен в [1] — [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Олейник О. А. О собственных колебаниях тел с концентрированными массами.— В кн. Современные проблемы математической физики и вычислительной математики.— М.: Наука, 1988.

[2] Oleinik O. A. Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularly perturbed operators.— Non-classical continuum mechanics.— 1987, Lecture Note series, 122, Cambridge university press.— P. 188—205.

[3] Головатый Ю. Д., Назаров С. А., Олейник О. А., Соболева Т. С. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой//Сиб. мат. журн.— 1988.—№ 5.

2. А. Л. Павлов (Донецк) «О существовании решения задачи Коши для уравнений типа Соболева — Гальперна».

В полупространстве $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ рассматривается задача Коши

$$P(D_x, \partial_t)\, u \equiv P_m(D_x)\, \partial_t^m u + \ldots + P_0(D_x)\, u = 0, \tag{1}$$

$$\partial_t^k u\,|_{t=0} = g_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, m-1). \tag{2}$$

Под решением задачи (1) — (2) понимается обобщенная функция $u(t)$ из S', зависящая от t как от параметра и удовлетворяющая (1) и (2).

Теорема. *Пусть множество общих вещественных нулей многочленов $P_k(\sigma)$ конечно и выполнено условие А. Петровского*:

$$A).\ \mathrm{Re}\,\lambda(\sigma) < \gamma, \textit{ если } P(\sigma, \lambda(\sigma)) = 0,\ \sigma \in R^n.$$

Тогда существует обобщенная функция $v(\lambda) \in S'$, голоморфно зависящая от λ в полуплоскости $\tau \equiv \mathrm{Re}\,\lambda > \gamma$ и удовлетворяющая уравнению

$$P(\sigma, \lambda)\, v(\lambda) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{m-1-j} P_{j+k+1}(\sigma)\, \hat{g}_k \lambda^j,$$

где $\hat{g}_k$ — преобразование Фурье $g_k \in S'$. Решение задачи Коши (1), (2) *существует при тех и только тех $g_k \in S'$, которые удовлетворяют условиям*

$$\lim_{\tau \to +\infty} \tau\, (\tau^j v(\tau) - \hat{g}_0 \tau^{j-1} - \ldots - \hat{g}_{j-1}) = \hat{g}_j \quad (j = 0, \ldots, m-1). \tag{3}$$

Условия (3) выполняются для начальных данных из пространства

$$P_m^k H_l^s = \{f \in S' : f = P_m^k(D_x)\,(1 + |x|^2)^{-l/2}\,(1 + |D_x|^2)^{-s/2} g,\ g \in L_2\},$$

где целое число $k \geqslant \max\{0, -\rho l\}$, ρ — некоторое число, зависящее от $P_m(\sigma)$.

3. А. Б. Васильева, В. Т. Волков «О периодических решениях сингулярно возмущенных уравнений параболического типа».

4. В. М. Борок (Харьков) «Регулярные граничные задачи в полосе».

5. В. Г. Мазья (Ленинград) «О теоремах единственности и итерационных алгоритмах решения для некорректных задач математической физики».

Первая часть доклада посвящена новым итерационным алгоритмам решения операторных уравнений первого рода. Для этих алгоритмов установлены регуляризирующие свойства.

В качестве примера рассмотрена задача об отыскании гармонической функции u в ограниченной области Ω, если значения u и ее нормальной производной известны на S, где S — подобласть $\partial\Omega$. Для отыскания u используется следующий итерационный алгоритм. На каждом шаге решается смешанная краевая задача для уравнения Лапласа, причем на S попеременно задаются значения функции u и ее нормальной производной. На $\partial\Omega \setminus S$ ставится условие Неймана или Дирихле соответственно, данные для которых берутся с предыдущего шага. Начальное приближение на $\partial\Omega \setminus S$ выбирается произвольно.

Теорема 1. *При точном задании u и $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ на S описанный итерационный процесс сходится по энергетической норме.*

Во второй части доклада рассмотрены линейные задачи термоупругости.

Теорема 2. *Имеет место единственность решения статической (квазистатической или динамической) задачи термоупругости, если на S заданы температура, вектор смещений и тензор деформаций.*

Изложенные в докладе результаты получены совместно с В. А. Козловым и А. В. Фоминым.

6. Ю. А. Кузнецов «Многосеточные методы разбиения области».

7. С. А. Голопуз (Владимир) «Асимптотические разложения решений краевых задач для некоторых эллиптических систем с малым параметром».

Вечернее заседание 21 января 1988 г., секция 1

1. С. И. Похожаев «Об одном конструктивном методе вариационного исчисления и его приложениях».

2. Ю. А. Дубинский «О необходимости условий Ковалевской и их обобщений».

3. К. А. Лурье (Ленинград) «Релаксация несамосопряженных многомерных задач оптимального проектирования».

4. М. Л. Бланк «Минимальные решения дискретных периодических вариационных задач».

Рассмотрим формальный лагранжиан L, заданный на множестве функций $f\colon \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}^1$,

$$L(f, X) = \sum_{x\in X} H(f(x), f(x-e_1), \ldots, f(x-e_p)); \quad e_i \in \mathbb{Z}^d \supset X.$$

Этот лагранжиан является многомерным обобщением лагранжиана в модели Френкеля — Конторовой, описывающей систему частиц, определяемую взаимодействием между «соседями». Будем полагать, что потенциал H имеет период 1 по каждой из координат своих переменных и смешанные частные производные второго порядка отрицательны. Это многомерный аналог условий закручивания.

Функцию f назовем минимальным решением (минималью) для лагранжиана L, если $L(f, X) \leqslant L(f+g, X)$ для любого подмножества $X \subset \mathbb{Z}^d$ и функции g с носителем в X, и самосогласованной, если любые ее целочисленные сдвиги не пересекаются.

Теорема. *У лагранжиана L есть семейство самосогласованных минималей, каждая из которых имеет вектор вращения. Обратно, для любого d-мерного вектора Q найдется самосогласованная минималь с вектором вращения Q. Предельные множества целочисленных сдвигов самосогласованных минималей образуют канторпоторы.*

Показывается, что в общем случае имеются несамосогласованные минимали, поведение которых нерегулярно. Приводятся достаточные условия отсутствия несамосогласованных минималей.

5. С. А. Назаров (Ленинград) «Асимптотика решений вариационных неравенств с малым параметром».

6. С. С. Кутателадзе (Новосибирск) «О подсчете субдифференциалов».

7. Я. И. Канель «Существование решения типа бегущей волны для системы Белоусова — Жаботинского».

Известная реакция Белоусова — Жаботинского [1] описывается системой

$$\partial u/\partial t - \partial^2 u/\partial x^2 = u(1-u-rv), \quad \partial v/\partial t - \partial^2 v/\partial x^2 = -buv, \tag{1}$$

$r > 0$, $b > 0$ — постоянные.

В настоящей работе доказано существование решения (1) типа бегущей волны $u = u(z) > 0$, $v = v(z) > 0$, $z = x + ct$,

$$u(-\infty) = v(+\infty) = 0, \quad u(+\infty) = v(-\infty) = 1.$$

Предполагается, что $0 < r < 1$, $0 < b < 1$, $c \geqslant 2\sqrt{1-r}$ при $r + b \leqslant 1$, $c \geqslant 2\sqrt{b}$ при $r + b > 1$. Положим $p = u'(z)$, $q = v'(z)$, $f = u(1-u-rv)$.

Задача сводится к нахождению решения системы $dp/du = c - f/p$, $dv/du = q/p$, $dq/du = (cq + buv)/p$ при условиях $p = p(u) > 0$,

$$v = v(u) > 0,\ q = q(u) < 0,\ 0 < u < 1,\ v(0) = 1,\ p(0) = q(0) = p(1) = q(1) = 0.$$

В основе доказательства лежит априорная оценка $p > p_1$, где

$$dp_1/du = c - f_1/p_1,\ p_1(1) = 0,\ p_1(u) > 0 \text{ при } 0 < u < 1,$$
$$f_1 = bu(1 - u) \text{ при } r + b \leqslant 1,\ f_1 = (1 - r)u(1 - u) \text{ при } r + b > 1.$$

Оценка получена с помощью принципа максимума.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях.— М.: Мир, 1983.

8. В. В. Чурбанов «К вопросу о глобальной разрешимости задачи Коши для некоторых нелинейных параболических систем».

Вечернее заседание 21 января 1988 г., секция 2

1. Б. П. Панеях «К теории некоэрцитивных краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений».

2. Г. В. Джаиани (Тбилиси) «Задача Векуа — Рикье для одного эллиптического уравнения высшего порядка с вырождением порядка».

3. Л. П. Купцов (Жуковский) «О фундаментальных решениях некоторых вырожденных эллиптических уравнений второго порядка».

4. В. И. Буренков «Теоремы об условной гипоэллиптичности».

5. Нгуен Тхань Нам «Задача с косой производной для эллиптических уравнений второго порядка в области типа двугранного угла».

6. С. П. Лавренюк (Львов) «Задача Коши для одного вырождающегося эволюционного уравнения».

Рассматривается задача Коши для уравнения

$$(p(x, t)u_t + c(x, t)u)_t + Au + b(x, t)u = f(x, t),\ (x, t) \in Q_T, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n,\ u_t(x, 0) = 0,\ x \in B, \tag{2}$$

$$Au \equiv \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta}(x, t) D_x^\beta u),\ D_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$Q_T = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n,\ 0 < t < T\},\quad B = \mathbb{R}^n \setminus \{x \in \mathbb{R}^n : p(x, 0) = 0\}.$$

Предполагается, что коэффициенты уравнения $a_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta t}$, p, p_t, b, c являются непрерывными функциями в Q_T.

Кроме того:

$$p(x, t) \geqslant \varphi(t),\ 0 \leqslant t \leqslant T;\ x \in \mathbb{R}^n;\ \varphi(0) = 0,$$

$\varphi(t)$ монотонно возрастает, $\varphi'(t)$ монотонно убывает; $a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$; $|b(x, t)| \leqslant \nu_0\varphi'(t)$;

$$\nu_4 = \inf_{0 \leqslant t \leqslant T} \max\{\sup_{Q_t} (|p_t| - 2c)/\varphi'(t);\ 0\} < \infty;\ \nu_3 = \max\{\nu_2;\ \nu_0\}$$

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} a_{\alpha\beta}(x, t)\eta_\alpha\eta_\beta \geqslant \nu_1 \sum_{|\alpha|=2m} \eta_\alpha^2;\quad \sum_{|\alpha|=|\beta|=2m} a_{\alpha\beta t}(x, t)\eta_\alpha\eta_\beta \leqslant \nu_2 \sum_{|\alpha|=2m} \eta_\alpha^2.$$

Если существует $\delta_0 > 0$ такое, что $\nu_4 + \nu_3\delta_0 < 1$, то задача (1), (2) не может иметь более одного обобщенного решения из $H^{2m,1}(Q_T)$. Если, кроме того, $|c_t(x, t)| \leqslant \varphi'(t)\rho(t)$, где $\rho(t)$ монотонно убывает, и

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f^2(x, t)\rho^2(t)}{(\varphi(t))^{[\nu_4]}} dx < \infty,$$

то существует обобщенное решение $u(x, t) \in H^{2m,1}(Q_T)$ задачи (1), (2).

7. С. Д. Ивасишен (Киев) «О начальных значениях решений ультрапараболических уравнений».

Совместно с Л. Н. Андросовой описаны множества начальных значений определенных в слое $\Pi_T = (0, T] \times \mathbb{R}^{2n}$ классических решений следующего вырожденного параболического уравнения с непрерывными коэффициентами:

$$(1)\qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial y_i} - \sum_{|k|\leqslant 2b} a_k(t) D_x^k\right] u(t, x, y) = 0, \ (t, x, y) \in \Pi_T.$$

Пусть c — постоянная из оценок фундаментального решения уравнения (1) в [1]; c_0, a_1, a_2, T_0 — такие постоянные, что

$$0 < c_0 < c, \ a_j \geqslant 0 \ (j=1, 2), \ 0 < T_0 < \max_{j=1,2} \left(\frac{c_0}{a_j}\right)^{\frac{2b-1}{2b(j-1)+1}} \text{ и } T_0 \leqslant T;$$

$$k(t) = (k_1(t), k_2(t)), \quad k_j(t) = c_0 a_j (c_0^{2b-1} - a_j^{2b-1} t^{2b(j-1)+1})^{1-q},$$

$$t \in [0, T_0], \ q = \frac{2b}{2b-1} \quad (j=1, 2), \quad k(0) = a = (a_1, a_2),$$

$$\Psi(t, x, y) = \exp\{-k_1(t) \mid x \mid^q - k_2(t) \mid y + tx \mid^q\},$$

$$\| u(t, \cdot, \cdot) \|_p^{k(t)} = \| u(t, \cdot, \cdot) \Psi(t, \cdot, \cdot) \|_{L_p(\mathbb{R}^{2n})},$$

$1 \leqslant p \leqslant \infty$; L_p^a, $1 < p \leqslant \infty$,— множество всех измеримых на $\mathbb{R}^{2n}$ функций φ, для которых $\| \varphi \|_p^a < \infty$, а L_1^a — множество всех борелевских на $\mathbb{R}^{2n}$ мер μ таких, что

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \Psi(0, x, y) d \mid \mu \mid (x, y) < \infty.$$

Теорема. *Множество L_p^a, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, является множеством начальных значений для классических решений уравнения* (1), *определенных в слое Π_T, тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in (0, T_0] : \ \| u(t, \cdot, \cdot) \|_p^{k(t)} \leqslant C.$$

При этом решения представимы в виде интегралов Пуассона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Эйдельман С. Д., Малицкая А. П. О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений// Дифференц. уравнения.— 1975.— Т. 11, № 7.— С. 1316—1330.

8. В. Н. Самохин «О задачах дифракции для нелинейных вырождающихся уравнений».

Ограниченная область $D \subset \mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей S разбита поверхностью Γ класса C^2 на области $D_1, D_2, \ldots, D_l$, $\Gamma \cap S = \varnothing$. Ищется функция $u(t, x)$, которая определена в $Q = (0, T) \times D$, в каждой области $Q_k = (0, T) \times D_k$ удовлетворяет уравнению

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_k-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = f(t, x), \ p_k > 2, \ k=1, \ldots, l,$$

и удовлетворяет условиям

$$(2)\qquad u(0, x) = u_0(x); \ u(t, x) = 0 \text{ на } (0, T) \times S,$$

$$(3)\qquad [u(t, x)] = 0 \text{ на } (0, T) \times \Gamma,$$

$$(4)\qquad \left[\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_k-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_i)\right] = 0, \text{ на } (0, T) \times \Gamma,$$

где $[\cdot]$ — скачок функции, ν — нормаль к Γ.

Теорема. *Существует и единственно решение задачи* (1) — (4) *в пространстве* $\overset{0}{V}(Q)$, *являющемся замыканием гладких в* Q *функций, финитных по* x, *по норме*

$$\| u(t, x);\ \overset{0}{V}(Q)\| = \sum_{k=1}^{l} \left(\int_0^T \left(\sum_{i=1}^{n} \int_{D_k} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p_k} dx \right) dt \right)^{1/p_k}.$$

При этом предполагается $u_0(x) \in L_2(D)$, $f(t, x) \in \overset{0}{V}'(Q)$. Аналогичный результат справедлив относительно соответствующей стационарной задачи.

Вечернее заседание 21 января 1988 г., секция 3

1. О. Я. Виро (Ленинград) «О формулах Арнольда и Хованского».
2. А. Г. Хованский «Многомерные обобщения теоремы Ролля».
3. А. Н. Варченко (Москва) «О многомерном определителе Вандермонда».

Пусть $S = \{A_{j \leqslant N}\}$ — конфигурация гиперплоскостей общего положения в $\mathbb{R}^n$. Перенумеруем, упорядочим и ориентируем ее ограниченные n-клетки, как в [1]. Выделим набор форм $\eta \langle I \rangle = x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$, $i_j \geqslant 0$, $i_1 + \ldots + i_n \leqslant N - n - 1$. Упорядочим набор лексикографически: $I < J$, если $i_1 + \ldots + i_n < j_1 + \ldots + j_n$, или $i_1 + \ldots + i_n = j_1 + \ldots + j_n$, но $i_1 + \ldots + i_{n-1} < j_1 + \ldots + j_{n-1}$ и т. д.

Теорема. *Определитель* $\det(S_\Delta \eta)$, *где* Δ *пробегает все ограниченные* n-*клетки*, η — *формы набора, равен*

$$(-1)^\alpha ((N-1)!)^\beta \prod \mathrm{vol}\,\langle K \rangle,$$

где $\alpha = 0$, *если* n *четно*, $\alpha = C_{N-1}^{n+1}$, *если* n *нечетно*; $\beta = -C_{N-2}^{n-1}$, *произведение берется по всем*

$$K = \{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_{n+1} \leqslant N\},$$

$\mathrm{vol}\,\langle K \rangle$ — *объем относительно* $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ *симплекса, ограниченного гиперплоскостями* A_k, $k \in K$.

Определитель Вандермонда получается при $n = 1$. Теорема была анонсирована на Международной топологической конференции в Баку в октябре 1987 г.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Варченко А. Н. Определитель матрицы периодов гипергеометрических интегралов// УМН.— 1988.— Т. 43, вып. 3.— С. 240—241.

4. Ю. С. Численко (Ленинград) «Вещественные распадения простых особенностей».
5. А. Н. Протопопов (Ленинград) «Топологическая классификация разветвленных покрытий двумерной сферы».
6. А. Б. Корчагин (Горький) «M-кривые степени 8: новые построения».
7. Е. И. Шустин (Куйбышев) «К классификации плоских вещественных кривых степени 8».

Изложенные в докладе результаты продвигают еще не завершенную (см. [1], [2]) изотопическую классификацию M-и (M — 1)-кривых степени 8 в $\mathbb{R}P^2$.

Теорема 1. *Не существуют* M-*кривые степени* 8 *типов* $1 \langle a \amalg 1 \langle 20 - a \rangle \rangle$, *где* $a \equiv 2 \bmod 4$ (*обозначения см. в* [1]).

Теорема 2. *Не существуют* (M — 1)-*кривые степени* 8 *типов* $1 \langle a \rangle \amalg 1 \langle b \rangle \amalg 1 \langle c \rangle$, *где* $(a, b, c) \in \{(1, 2, 15), (1, 3, 14), (1, 5, 12), (2, 2, 14), (2, 3, 13), (2, 4, 12), (2, 5, 11), (2, 6, 10), (2, 7, 9), (2, 8, 8), (3, 3, 12), (3, 4, 11), (3, 5, 10), (3, 6, 9), (3, 7, 8), (4, 4, 10)\ (4, 5, 9), (4, 6, 8), (5, 5, 8)\}$.

В основу доказательства положены две конструкции, которые расположению овалов плоской кривой сопоставляют некоторые подрешетки в $H_2(X)$, где X — двулистное накрытие $\mathbb{C}P^2$ с ветвлением вдоль комплексификации кривой. Запреты вытекают из естественных ограничений на подрешетки в $H_2(X)$.

Теорема 2 доставляет первый запрет (M — 1)-кривых, удовлетворяющих известным неравенствам и сравнениям [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Виро О. Я. Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет// УМН.— 1986.— Т. 41, вып. 3.— С. 45—67.

[2] Шустин Е. И. Новая M-кривая 8-й степени//Мат. заметки.— 1987.— Т. 42, вып. 2.— С. 180—186.

8. Н. В. Иванов «Приклеивание углов к пространству Тайхмюллера».

Десять лет назад У. Харви анонсировал существование границы пространства Тайхмюллера, аналогичной границе Бореля — Серра симметрических пространств некомпактного типа (см. [1], § 4). В докладе было рассказано о построении такой границы, основанном на идеях [1] и следующих результатах.

Теорема 1. *Пусть S — компактная поверхность и $\{g_t\}$ — гладкое семейство римановых метрик постоянной кривизны — 1 на S. Пусть $x \in S$ и C — нестягиваемая окружность на S. Обозначим через C_t изотопную C окружность на S, имеющую постоянную кривизну в метрике g_t и проходящую через x. Тогда C_t однозначно определена для открытого множества значений параметра t и гладко зависит от t.*

Теорема 2. *Пусть P — диск с двумя дырами и ∂_1, ∂_2, ∂_3 — компоненты его края. Для $l=(l_1, l_2, l_3) \in \mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$ обозначим через $g^0(l)$ какую-нибудь полную риманову метрику постоянной кривизны —1 на $P \setminus \bigcup\limits_{l_i=0} \partial_i$ с геодезическим краем такую, что длина окружности ∂_i в этой метрике (при $l_i \neq 0$) равна l_i. Тогда существует гладкое семейство $\{g_l\}$, $l \in \mathbb{R}^3_{\geqslant 0}$, метрик постоянной кривизны —1 на P такое, что $g_{(l_1, l_2, l_3)}$ изометрически вкладывается в $g^0(l_1^2, l_2^2, l_3^2)$ и длины всех ∂_i меньше 1/10.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Иванов Н. В. Комплексы кривых и модулярные группы Тайхмюллера// УМН.— 1987.— Т. 42, вып. 3.— С. 49—91.

Некоторые нерешенные математические задачи, ставившиеся и обсуждавшиеся на заседаниях

В. М. Миллионщиков «Теоретико-числовые задачи о показателях Ляпунова».

А. Ф. Филиппов [1] вычислил с погрешностью $<0{,}1$ показатели Ляпунова λ_1, λ_2 уравнения $\ddot{x}+(\cos t+\sin \sqrt{2}t)x=0$. Нельзя ли вычислить эти показатели точно, т. е. найти формулу, выражающую их через известные константы? В связи с этим вопросом возникает

Задача 1. Рациональны ли числа λ_1, λ_2?

Вполне возможно, что ответ окажется отрицательным, и тогда приобретет смысл следующая

Задача 2. Принадлежат ли λ_1, λ_2 квадратичному расширению поля рациональных чисел?

Если и этот вопрос получит отрицательный ответ, то приобретет интерес

Задача 3. Являются ли λ_1, λ_2 алгебраическими числами? Ставится также

Задача 4. Выражаются ли λ_1, λ_2 через число 1 с помощью конечного числа арифметических операций, радикалов и функций exp, ln, sin, arcsin?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Филиппов А. Ф. Расчет на ЭВМ характеристических показателей некоторых линейных уравнений с почти периодическими коэффициентами// Дифференц. уравнения.— 1987.— Т. 23, № 6.— С. 1093.

К. С. Сибирский (Кишинев) «Задача о нуль-системах».

Распространяя введенное Д. Гильбертом (см. [1], с. 325 или [2], с. 275) понятие нуль-формы на системы дифференциальных уравнений, скажем, что система

$$\frac{dx}{dt}=P(x, y), \quad \frac{dy}{dt}=Q(x, y), \tag{1}$$

где P и Q — полиномы степени n без свободных членов, является нуль-системой, если все ее центроаффинные инварианты [3] равны нулю.

Легко показать, что система

$$\frac{dx}{dt} = x^2 A(x), \quad \frac{dy}{dt} = x[B(x) + yC(x)], \tag{2}$$

где A, B и C — полиномы, является нуль-системой. При $n = 2$ справедлива

Теорема. *Система* (1) *является нуль-системой тогда и только тогда, когда она центроаффинным преобразованием приводится к виду* (2).

Верна ли эта теорема при $n > 2$?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Hilbert D. Gesammelte abhandlungen. Bd. II.— Springer-Verlag, 1970.
[2] Lie groups: History, frontiers and applications//Vol. 8, Hilbert's invariant theory papers.— Math. Brookline, Massachusetts. USA: Sci. Press, 1978.
[3] Сибирский К. С. Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений.— Кишинев: Штиинца, 1982.