ЗАСЕДАНИЯ СЕМИНАРА ИМЕНИ И. Г. ПЕТРОВСКОГО ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОБЛЕМАМ ФИЗИКИ

Заседание 14 марта 1984 г.

1. В. Я. Ривкинд (Ленинград) «Задачи движения вязких несжимаемых жидкостей со свободными границами раздела и общая теория приближенных методов их решения».

Рассматриваются вопросы существования и единственности решения стационарных задач течения вязких несжимаемых жидкостей с границей раздела между ними, подлежащей определению одновременно с нахождением полей скоростей и давления. Течение в каждой из жидкостей описывается полной системой уравнений Навье — Стокса со своими значениями параметров вязкости, плотности. На свободной границе раздела ставятся условия согласования: равенство нулю нормальной компоненты скорости для каждой из соприкасающихся жидкостей, отсутствие скачка касательных напряжений при переходе через границу раздела, пропорциональность скачка нормальных напряжений средней кривизне. Ранее в [1], [2] при определенных предположениях о характере исходных данных (достаточно большая вязкость, поверхностное натяжение жидкостей, «близость» плотностей, «малость» массовых сил) доказана классическая разрешимость в классах Гёльдера для ряда характерных задач: задачи о двоякопериодических внутренних волнах, задачи о двуслойном самогравитирующем шаре, задачи о капле вязкой жидкости, двигающейся в другой вязкой жидкости, задачи о сепараторе и др.

Существование решения этих задач удается доказать и в соболевских классах (скорости в $W_2^2(\Omega_i)$, граница в $W_2^{5/2}(S)$), что является существенным для построения и обоснования приближенных методов. Несмотря на имеющиеся различия между отдельными задачами, исследование всех их основывается на доказательстве того, что оператор, соответствующий задаче, является оператором сжатия в шаре K_ρ банахова пространства (своего для каждой из задач). Пусть оператор $\mathcal{A}$, соответствующий задаче, осуществляет непрерывное обратимое отображение пространства U на F. $\mathcal{A}$ сопоставляется семейство операторов $\mathcal{A}_h$, отображающих U_h на F_h. Пусть непрерывные операторы P_h, Q_h отображают U, F на U_h, F_h, а операторы P_h', Q_h' отображают U_h, F_h на U, F, причем $P_hP_h' = I_{U_h}$, $Q_hQ_h' = I_{F_h}$. Пусть T_h — оператор сжатия из F_h в F_h', а приближенный оператор $\mathcal{A}_h$ таков, что $\mathcal{A}_hP_hu = (I_{F_h} + T_h)Q_h\mathcal{A}u$. Тогда при естественных предположениях об аппроксимациях $\mathcal{A}_h$ оператора $\mathcal{A}$ и выполнении соотношений $P_h'P_hu \to u (h \to 0)$ $\forall u \in U$, $Q_h'Q_hf \to f (h \to 0)$ $\forall f \in F$, доказывается сходимость приближенных решений к точному. При дополнительных предположениях о характере аппроксимаций $\mathcal{A}_h$ выводятся оценки скорости сходимости приближенных решений к точному. Доказывается, что операторы $\mathcal{A}_h$, описанные выше, соответствуют различным вариантам метода конечных элементов, методу Галёркина. Это позволяет доказать их сходимость и вывести оценку скорости сходимости. Все полученные результаты обобщаются на более сложные задачи, учитывающие тепломассообмен и термокапиллярные эффекты. По указанным алгоритмам рассчитан ряд конкретных задач [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ривкинд В. Я. Исследование задачи о стационарном движении капли в потоке вязкой несжимаемой жидкости.— ДАН, 1976, т. 227, № 5, с. 1071—1074.

[2] Ривкинд В. Я. Исследование некоторых задач течения многослойных вязких несжимаемых жидкостей.— В кн.: Труды Всесоюзной конференции по уравнениям с частными производными.— М.: Изд-во МГУ, 1978, с. 423—424.

[3] Ривкинд В. Я. Некоторые методы расчета течений вязких несжимаемых жидкостей с неизвестной границей раздела.— Числ. методы мех. сплошной среды, 1981, т. 12, № 4, с. 106—115.

Заседание 31 октября 1984 г.

1. С. П. Новиков «Консервативные системы гидродинамического типа. Скобки Пуассона: их геометрия и алгебра»

1. Согласно [1], для одномерного x уравнения гидродинамического типа (г. т.), скобки Пуассона г. т. и функционалы г. т. определяются формулами (1) — (3):

$$u^i_t = v^i_j(u)\, u^j_x \qquad (i,\ j = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

$$\{u^i(x),\ u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\,\delta'(x-y) + b^{ij}_k u^k_x\,\delta(x-y), \tag{2}$$

$$\mathcal{H} = \int h(u)\, dx. \tag{3}$$

Некоторые свойства уравнений (1) обсуждались, начиная с Римана.

Здесь $u^1, \ldots, u^N$ — локальные координаты точки на многообразии $u \in M^N$. Формулы (1) — (3) инвариантны относительно точечных замен $u(w)$. С помощью скобок (2)-функционалы (гамильтонианы) г. т. порождают уравнения г. т., хотя далеко не всякое уравнение (1) гамильтоново:

$$u^i_t(x) = \{u^i(x),\ \mathcal{H}\} = \left(g^{ij}\frac{\partial}{\partial x} + b^{ij}_k u^k_x\right)\frac{\partial h}{\partial u^j}. \tag{4}$$

Согласно [1], если $\det g^{ij}(u) \neq 0$, то при заменах координат $u(w)$ набор $g^{ij}(u)$ меняется как симметричный тензор («метрика») на M^N; b^{ij}_k определяют набор «символов Кристоффеля»:

$$\Gamma^j_{sk} = g_{si} b^{ij}_k, \qquad g_{si} g^{ij} = \delta^j_s. \tag{5}$$

Скобка (2) удовлетворяет всем требованиям, если и только если метрика g^{ij} псевдоевклидова (нулевой кривизны), и Γ^j_{sk} определяются по метрике обычными формулами. В [1] доказан также принцип «сохранения консервативности» в методе усреднения типа Уизема: уравнения Уизема медленных модуляций для гамильтоновых теоретико-полевых систем являются консервативными г. т.

Величины b^{ij}_k удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\hat{b}^{ij} = g_{ps}\hat{b}^{pi} \wedge \hat{b}^{sj}, \qquad b^{ij}_k du^k = \hat{b}^{ij}.$$

Координаты $(u^1, \ldots, u^N)$ называются лиувиллевыми, если $a\hat{b}^{ij} = 0$ для всех i, j. Тогда существует матрица $\gamma^{ij}(u)$, такая, что

$$g^{ij} = \gamma^{ij} + \gamma^{ji}, \qquad b^{ij}_k = \partial\gamma^{ji}/\partial u^k.$$

Согласно [1], естественные «физические» координаты, в которых возникает уравнение Уизема, лиувиллевы, если усреднявшиеся локальные плотности давали набор инволютивных интегралов исходной системы.

В работе [2] получены некоторые результаты для многомерного $x = (x^1, \ldots, x^N)$.

II. Инвариантами Римана для уравнения г. т. (1) называются такие координаты $(w^1, \ldots, w^N)$, что матрица ${}^i_j(w)$ диагональна (если они существуют). Для $N > 2$ они могут не существовать, даже если собственные числа матриц $v^i_j(u)$ действительны и различны.

Для интегрируемых систем типа KdV, sh = Gordon уравнение Уизема обладает инвариантами Римана (Уизем, 60-е годы, Флашка — Форест — Маклафлин, конец 70-х гг.). Согласно гипотезе автора, существование инвариантов Римана *вместе* с консервативностью порождает интегрируемость. Эта гипотеза была недавно доказана С. П. Царёвым [3], который нашел также красивую процедуру явного отыскания точных решений. Любой интеграл г. т. $I = \int j(u)dx$ консервативной системы (1) с гамильтонианом $\mathcal{H} = \int h(u)dx$ порождает другую систему г. т. Мы имеем пару коммутирующих потоков:

$$(6) \qquad \begin{cases} u_t^i = \{u^i(x), \quad I\} = w_j^i(u)\, u_x^j, \\ u_t^i = \{u^i(x), \ \mathcal{H}\} = v_j^i(u)\, u_x^j, \end{cases}$$

и инварианты Римана существуют, соотношение (7) совместно

$$(7) \qquad w_j^i(u) = v_j^i(u)\, x + \delta_j^i t.$$

Его решение $(u^1(x, t), \ldots, u^N(x, t))$ дает решение уравнения (1).

III. Представляет интерес изучение скобок Пуассона г. т. (2), линейно зависящих от полей $u^i(x)$, где имеем

$$(8) \qquad \begin{cases} g^{ij} = C_k^{ij} u^k + g_0^{ij}, & b_k^{ij} = \mathrm{const}, \qquad C_k^{ij} = \mathrm{const}, \\ g_0^{ij} = \mathrm{const}, & C_k^{ij} = b_k^{ij} + b_k^{ji}. \end{cases}$$

При условии невырожденности — $\det(C_k^{ij} u^k + g_0^{ij}) \neq 0$ для каких-то $(u^1, \ldots, u^N)$ — формулы (8) определяют интересную структуру на псевдоевклидовом пространстве, инвариантную относительно аффинных замен координат (которые, очевидно, лиувиллевы):

$$(9) \qquad u^i = a_j^i w^i + u_0^i, \quad d\hat{b}^{ij} = 0.$$

Тензор b_k^{ij} определяет конечномерную алгебру B в базисе $(e^1, \ldots e^N)$ по формулам (10):

$$(10) \qquad e^i e^j = b_k^{ij} e^k, \qquad e^i \in B.$$

Впервые эти алгебры обсуждались в [4], с. 26, среди примеров, где были сделаны интересные замечания об их алгебраических свойствах (принадлежащие С. И. Гельфанду); далее их теория не развивалась до [5]. В работе [5] авторы построили теорию таких алгебр, придя к первичным определениям независимо, исходя из систем (г. т.). Для вектор-функций $p(x) = p_i(x)e^i$, $q(x) = q_j(x)e^j$ определяется коммутатор по формуле (11) исходя из умножения (10):

$$(11) \qquad [p, q] = p'q - q'p, \qquad p(x) \in B, \qquad q(x) \in B.$$

Из тождества Якоби для (11), в алгебре B вытекают тождества

$$(12) \qquad a(bc) = b(ac), \qquad (ab)c - a(bc) = (ac)b - a(cb).$$

В работе [5] построена теория расширений алгебр (12) и центральных R-расширений алгебр Ли (11), приводящих к обобщениям алгебры Вирасоро. Обсуждается ряд интересных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова — Уизема.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 4, с. 781—785.

[2] Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа.— ДАН СССР, 1984, т. 279, № 2.

[3] Царёв С. П. О диагональных гамильтоновых системах гидродинамического типа.— ДАН СССР, 1985.

[4] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры.— Функцион. анализ и его прил., 1979, т. 13, вып. 4, с. 13—30.

[5] Белинский А. А., Новиков С. П. Скобки Пуассона гидродинамического типа, Фробениусовы алгебры и алгебры Ли.— ДАН СССР, 1985, т. 283, № 1, с. 35—39.

Заседание 14 ноября 1984 г.

1. В. М. Петков (НРБ) «Распределение полюсов матрицы рассеяния для волнового уравнения».

Пусть $K \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 3$ — нечетное число) — ограниченная область с гладкой границей ∂K, $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus K$. Рассмотрим в $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ смешанную задачу для волнового уравнения

$$(1) \qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta) u = 0 \text{ в } \mathbb{R}_+ \times \Omega, & u = 0 \text{ в } \mathbb{R}_+ \times \partial K, \\ u\,|_{t=0} = u_0, & \partial_t u\,|_{t=0} = u_1. \end{cases}$$

Матрица рассеяния, отвечающая задаче (1), является операторнозначной функцией $S(\lambda)$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), которая допускает мероморфное продолжение в $\mathbb{C}$ с полюсами в верхней полуплоскости. В докладе рассматривается вопрос о распределении полюсов λ_j в случае, когда Ω — область неловушечного типа, и в случае, когда Ω — область ловушечного типа. Во втором случае для областей с изолированным периодическим лучом доказывается, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют полюсы λ_j, для которых $0 < \operatorname{Im} \lambda_j < \varepsilon \ln |\lambda_j|$. Рассматривается проблема о существовании изолированного луча, а также случай, когда изолированному лучу соответствует отображение Пуанкаре, содержащее единицу в спектре.

Заседание 21 ноября 1984 г.

1. В. П. Мясников, М. В. Федорюк «Решение модельных уравнений гидродинамики неоднородной жидкости».

Заседание 28 ноября 1984 г.

1. В. В. Кучеренко «Асимптотические решения уравнений с вырождающимся символом».

В цикле работ [1] — [3] разработан метод построения асимптотических решений и параметрикса задачи Коши для нестрого гиперболического уравнения в предположении, что на множестве точек вырождения Σ главного символа $P_m(x, t; \xi, \xi_0)$ матрица $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ Hess $P_m|_\Sigma$ имеет два вещественных, отличных от нуля собственных значения μ, $-\mu$, остальные собственные значения либо нулевые, либо чисто мнимые. В. Я. Иврием показано, что для нестрого гиперболических уравнений этот случай является случаем общего положения. Посредством канонических преобразований по (x, ξ) в конической по (ξ_0, ξ) окрестности Ω множества точек вырождения символа P_m при условии $\mu \neq 0$ получим представление $P_m = Q(x, t; \xi, \xi_0)\ [\xi_0^2 - D(x, t; \xi)]$, $D(x, t; \xi) = (t - f(x, \xi))^2 \gamma(t, x; \xi) + d(x, \xi)$, где f, γ, d однородны по ξ соответственно степени 0,2 и $d|_\Omega \geqslant 0$, $\inf \gamma|_\Sigma > 0$, $Q|_\Sigma \neq 0$.

В [2] изучается распространение волн в случае $d \equiv 0$, а в [3] строится параметрикс задачи Коши в предположении $f = \text{const}$. Доказано, что решение задачи Коши для нестрого гиперболического уравнения порядка m существует и единственно в $H_{s+m-\nu-1}(R^n \times (-T, T))$, $s + m - 1 - \nu \geqslant 0$, где потеря гладкости ν определяется субглавным символом

$$\nu = 7/4 + \sup_\Sigma |P'_{m-1}/2Q\gamma|.$$

Теорема существования и единственности доказывается посредством явной конструкции параметрикса, представимого в виде суммы интегральных операторов типа Фурье.

Для построения параметрикса для уравнения ставится задача Коши с быстро осциллирующими начальными данными $\partial^{k-1} u\,|_{t=0} = |\xi|^{m-k-1} \exp i\langle x, \bar\xi\rangle$. Для применимости метода канонического оператора Маслова к построению формально-асимптотического решения задачи Коши достаточно потребовать, чтобы на лагранжевых многообразиях $\Lambda_\pm$, созданных фазовыми потоками гамильтонианов $H_\pm \overset{\text{def}}{=} \pm\sqrt{(t-f)^2\gamma + d}$ из начальных многообразий $\Lambda = \{t = 0,\ y = x,\ \xi = \bar\xi/|\bar\xi|\}$ выполнялось условие $D|_{\Lambda_\pm} \geqslant |\xi|^{-1+\delta}$, $\delta > 0$.

В области $D\,|_{\Lambda_\pm} < |\,\xi\,|^{-1+\delta}$ построение асимптотических решений после канонических преобразований сводится к главному символу $\xi_0 t + \tilde{d}(x, \xi)$. Грубо говоря, главным членом будет $\exp\,\{i\,|\,\overline{\xi}\,|\,\ln \xi_0 \hat{d}\}\varphi(x, \xi_0)\,\exp i\,\langle x, \overline{\xi}\rangle$, $\hat{d}$ — самосопряженный оператор, отвечающий символу $\tilde{d}$. Особая точка ξ_0 обходится в нижней полуплоскости. Функция $\exp\,\{i\,|\,\xi\,|\,\ln \xi_0 \hat{d}\} \times \varphi(x)\exp i\langle x, \xi\rangle$ вычисляется по методу канонического оператора Маслова с комплексной фазой.

Отметим, что удается построить асимптотические решения и для уравнений с сингулярными коэффициентами. Например, асимптотическое решение уравнения $h^2 y'' + [a_2 x^{-2} + a_1 x^{-1} + a(x)y] = 0$ строится в виде

$$y = x^{\beta} \int\limits_C \exp \frac{i}{h}\,[xp + bp^{-1}]\,\Phi(p, h)\,dp.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кучеренко В. В., Осипов Ю. В. Асимптотические решения обыкновенных дифференциальных уравнений с вырождающимся символом.— Мат. сб., 1982, т. 118, № 1, с. 73—103.

[2] Кучеренко В. В., Осипов Ю. В. Задача Коши для нестрого гиперболических уравнений.— Мат. сб., 1983, т. 120, № 1, с. 84—101.

[3] Кучеренко В. В., Мотылёв Л. Ю. Нестрого гиперболическое уравнение с негладкими характеристиками.— ДАН, 1984, т. 276, № 5, с. 1056—1059.

Заседание 5 декабря 1984 г.

1. А. А. Давыдов (Владимир) «Об уравнениях, не разрешенных относительно производной, и о релаксационных колебаниях».

Найдены нормальные формы уравнения общего положения $F(x, y, p) = 0$, где F — гладкая (т. е. класса C^∞) функция, $p = dy/dx$. Эти формы применяются при изучении особенностей полей предельных направлений двумерных управляемых систем [1]; особенностей семейства асимптотических линий вблизи отдельных точек кривой параболических точек поверхности общего положения [4]; В. И. Арнольд открыл совпадение этих нормальных форм с нормальными формами траекторий медленных движений уравнения общего положения релаксационного типа с двумя медленными и одной быстрой переменными. Уравнение первого порядка, не разрешенное относительно производной, ранее также изучалось в [2], [5] — [9]. Далее мы будем пользоваться терминологией [3].

Теорема 1. *Росток уравнения $F = 0$ класса C^∞ в особой точке этого уравнения «C^∞ — нормальное хорошо сложенное седло, узел, фокус» C^∞-диффеоморфизмом плоскости (x, y) приводится к ростку в нуле уравнения $y = (p + kx)^2$ при $k < 0$, $0 < k < 1/8$ и $^1/_8 < k$ соответственно (гомеоморфизмами же можно добиться $k = -1$, $k = {}^1/_9$ и $k = {}^1/_4$ соответственно даже без условия C^∞-нормальности).*

Пусть нуль — особая точка гладкого векторного поля v на плоскости и каждое из собственных чисел линеаризации этого поля в этой точке отлично от нуля, а их отношение — от ± 1. Инволюция, имеющая проходящую через нуль линию неподвижных точек, называется *v-хорошей*, если 1) на этой линии и только на ней поле v и его образ при этой инволюций коллинеарны, и 2) четыре собственных направления линеаризации этого поля и производной этой инволюции в нуле попарно различны.

Теорема 2. *Ростки в нуле двух v-хороших инволюций класса C^∞ переводятся один в другой C^∞-диффеоморфизмом плоскости, переводящим каждую фазовую кривую поля v в себя, если и только если касательные в нуле к линиям их неподвижных точек не разделены в пространстве направлений в нуле собственными направлениями линеаризации поля v в нуле.*

Замечания. 1) Доказательство теоремы 1 использует полученную Дара классификацию типов особых точек уравнения $F = 0$ общего положения и теорему 2; 2) обе эти теоремы верны и в вещественно-аналитическом случае; 3) обзор результатов по топологическим нормальным формам уравнения $F = 0$ содержится в [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арнольд В. И. Теория катастроф.— М.: Знание. Сер. Математика, кибернетика, 1981, № 9.

[2] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1978.

[3] Давыдов А. А. Нормальная форма дифференциального уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности его особой точки.— Функцион. анализ и его прил., 1985, т. 19, вып. 2.

[4] Ландис Е. Е. Тангенциальные особенности.— Функцион. анализ и его прил., 1981, т. 15, вып. 2, с. 36—49.

[5] Кузьмин А. Г. О поведении характеристик уравнения смешанного типа вблизи линии вырождения.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 11, с. 2052—2063.

[6] Dara L. Singularities generiques des equations differentielles multiformes.— Bol. Soc. Bras. math., 1975, v. 6, № 2, p. 95—128.

[7] Thom R. Sur les equations differentielles multiforms et leurs integrales singulieres.— Th. R. Bol. Bras. math., 1971, v. 3, № 1, p. 1—11.

[8] Bruce J. W. A note on first order differential equations of degree greater than one and wave front evolution.— Boll. London Math. Soc., 1983.

[9] Takens F. Constrained equations: a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions.— Lect. Notes in Math., 1976, v. 525, p. 143—234.

Заседание 12 декабря 1984г.

1. А. И. Нейштадт «Асимптотическое исследование потери устойчивости равновесия при медленном прохождении пары собственных чисел через мнимую ось».

Рассматриваются системы с быстрыми и медленными движениями

$$(1) \qquad \varepsilon\dot{x} = f(x, y, \varepsilon), \quad \dot{y} = g(x, y, \varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^m, \quad 0 < \varepsilon \ll 1.$$

Замороженная система — это подсистема для быстрых переменных в (1) с $y = \text{const}$ и $\varepsilon = 0$ в правой части. Пусть $x = x_s(y)$ — ее невырожденное равновесие с собственными числами $\lambda_i(y)/\varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Вводится эволюционная система

$$(2) \qquad \dot{Y} = g(x_s(Y), Y, 0), \quad X = x_s(Y).$$

Если равновесие $x_s(y_0)$ асимптотически устойчиво в линейном приближении, а точка x_0 принадлежит его области притяжения, то решение $x(t)$, $y(t)$ системы (1) с начальными условиями x_0, y_0 при $t = t_0$ быстро входит в малую окрестность поверхности равновесий и затем приближенно описывается решением $X(t)$, $Y(t)$ системы (2), $Y(t_0) = y_0$[1].

Пусть равновесие $x_s(Y(t))$ в некоторый момент времени t_* теряет устойчивость так, что пара его сопряженных собственных чисел $\lambda_{1,2}(Y(t))/\varepsilon$, $\lambda_1 = \overline{\lambda}_2 \neq \lambda_2$ пересекает мнимую ось трансверсально и с ненулевой скоростью, а остальные собственные числа лежат в левой полуплоскости. Оказывается, при аналитических правых частях (1) точка $x(t)$ остается вблизи равновесия $x_s(Y(t))$ еще время порядка 1 после момента потери устойчивости t_*, а затем быстро уходит от него на расстояние порядка 1. Это явление было на примере обнаружено в [2]. В представленном докладе даны формулировки и доказательства для общего случая. Использован основной прием из [2] — анализ решений при комплексном времени.

При неаналитических правых частях описанное явление отсутствует. Если $f, g \in C^k$, то уход от равновесия запаздывает на время $O(\sqrt{\varepsilon \mid \ln \varepsilon \mid})$ после момента t_*, а если $f, g \in C^\infty$ — на время $O(M(\varepsilon)\sqrt{\varepsilon \mid \ln \varepsilon \mid})$, $M(\varepsilon) \to \infty$ при $\varepsilon \to 0$. Эти оценки неулучшаемы.

Уточним формулировки для аналитического случая. Введем комплексную фазу $\varphi(t) = \int\limits_{t_*}^{t} \lambda_1(Y(\tau))d\tau$. Функция $\operatorname{Re}\varphi$ имеет минимум в точке t_*. При малых $t_0 - t_* < 0$ введем $\Pi(t_0) > t_*$ — точку, в которой $\operatorname{Re}\varphi(\Pi(t_0)) = \operatorname{Re}\varphi(t_0)$. На плоскости комплексного времени t точки t_0 и $\Pi(t_0)$ соединяет дуга Γ линии уровня $\operatorname{Re}\varphi = \text{const}$. В области, ограниченной Γ и симметричной ей относительно вещественной оси дугой, выполнены следующие условия: 1) $Y(t)$ аналитична, f, g аналитичны в точках $x_s(Y(t))$, $Y(t)$; 2) $\lambda_{1,2} \neq 0$;

3) $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i = 1, 2, j = 3, \ldots, n)$; 4) линеаризованная замороженная система, рассматриваемая вдоль линий $\operatorname{Re}\varphi = \mathrm{const}$, имеет $n - 2$ собственных числа с отрицательными вещественными частями; 5) касательные к линиям $\operatorname{Re}\varphi = \mathrm{const}$ не вертикальны. Определим t_*^- — нижнюю грань значений t_0, для которых выполнены условия 1) — 5). Обозначим $\zeta(t) = x(t) - x_s(y(t))$, ξ_0 и θ_0 — проекции $\zeta(t_0)$ на собственные подпространства матрицы $\partial f/\partial x$ при $x = x_s(y_0)$, $y = y_0$, $\varepsilon = 0$, отвечающие собственным числам $\lambda_{1,2}$ и $\lambda_{3,\ldots,n}$ соответственно.

Теорема. *Для системы* (1) *и заданных* t_0, y_0 *существуют положительные постоянные* $\varepsilon_0, c_1, \ldots, c_8$ *такие, что если* $\varepsilon < \varepsilon_0$, $t_0 \in (t_*^-, t_*)$, $|\zeta(t_0)| < c_1^{-1}$, *то* $|\zeta(t)| < c_2\varepsilon$ *при* $t_0 + c_3\varepsilon |\ln\varepsilon| < t < \Pi(t_0) - c_4\varepsilon|\ln\varepsilon|$. *Если, кроме того,* $|\xi_0| > c_5\varepsilon$, $|\theta_0| < c_6^{-1}\sqrt{\varepsilon}$, *то* $\Pi(t_0)$ — *момент ухода*: $\zeta(\Pi(t_0) + c_7\varepsilon|\ln\varepsilon|) > c_8^{-1}$.

Следствие. *Если* $t_0 \leqslant t_*^-$, *то для любого* $\delta > 0$, *найдутся* ε_0, c_9 *такие, что если* $\varepsilon < \varepsilon_0$, $|\zeta(t_0)| < c_1^{-1}$, *то* $|\zeta(t)| < c_9\varepsilon$ *при* $t_0 + c_3\varepsilon|\ln\varepsilon| < t < \Pi(t_0) - \delta$.

На соединяющей точки t_*^- и $t_*^+ = \Pi(t_*^-)$ дуге Γ_* линии $\operatorname{Re}\varphi = \mathrm{const}$ нарушается одно из условий 1) — 5).

Гипотеза. *Пусть в системе* (1) *на дуге* Γ_* *нарушается только условие* $\lambda_1 \neq 0$ *и выполнены некоторые условия общности положения. Если* $t_0 < t_*^-$, $|\zeta(t_0)| < c_1^{-1}$, *то* $|\zeta(t)| < c_2\varepsilon$ *при* $t_0 + c_3\varepsilon|\ln\varepsilon| < t < t_*^+ - c_4\varepsilon|\ln\varepsilon|$ *и* $|\zeta(t_*^+ + c_4\varepsilon|\ln\varepsilon|)| > c_5^{-1}$, *то есть* t_*^+ — *момент ухода для всех траекторий, пришедших к равновесию раньше момента* t_*^-.

Автор благодарит В. И. Арнольда за предложенную тему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания.— М.: Наука, 1975.

[2] Шишкова М. А. Рассмотрение одной системы дифференциальных уравнений с малым параметром при высших производных.— ДАН СССР, 1973, т. 209, № 3, с. 57—579.

Заседание 19 декабря 1984 г.

1. С. Н. Кружков «Некоторые аспекты современной проблематики теории уравнения Кортевега — де Фриза».

Заседание 27 февраля 1985 г.

1. С. А. Молчанов, А. А. Рузмайкин, Д. Д. Соколов «Температурные и магнитные поля в нестационарных случайных средах».

Эволюционные процессы в нестационарных случайных средах описываются дифференциальными уравнениями, коэффициенты которых — случайные функции пространственных переменных x и времени t, причем временные корреляции предполагаются в том или ином смысле быстро убывающими. В докладе обсуждаются три конкретные модели физических нестационарных сред.

1°. Задача о переносе температуры в поверхностном слое океана (Хассельман):

$$\partial T/\partial t + (v\nabla)T = \varkappa\,\Delta T + \lambda Q, \qquad x \in \mathbb{R}^2, \qquad \operatorname{div} v = 0,$$

где v — крупномасштабные флуктуации скорости поверхности океана, Q — источник, характеризующий теплообмен между атмосферой и океаном, $\varkappa$ — коэффициент диффузии, обусловленный, главным образом, мелкомасштабной турбулентностью, λ — коэффициент диссипации тепловой энергии. Задача решается в приближении δ-коррелированности v и Q. Последнее означает, что $V\tau \ll l$, $\tau\sqrt{\varkappa} \ll l$, где τ, l — корреляционные масштабы по времени и по пространству, V — среднеквадратичная скорость. Один из новых эффектов, отмеченных в совместной работе с Л. И. Питербаргом, связан с появлением в уравнении для среднего поля $\langle T\rangle$ источника, который выражается через пространственный коррелятор v и Q. Величина и время жизни температурных флуктуаций описываются в терминах второго момента $\langle T(t, x)\ T(t, y)\rangle$. Теория дает качественно правильную интерпретацию экспериментальных данных.

2°. Параболическая модель Андерсона с нестационарным потенциалом $\xi(t, x)$:

$$\partial c/\partial t = \varkappa\Delta c + \xi c, \qquad x \in \mathbb{R}^{\nu}, \quad \nu \geqslant 3.$$

Она описывает концентрацию вещества в средах с цепными реакциями и диффузией (И. М. Лифшиц). Снова используется приближение δ-коррелированности ξ, причем считается, что $\langle\xi\rangle = 0$.

Для моментов $m_k(t, x_1, \ldots, x_k) = \langle (c\, t, x_1) \ldots c(t, x_k)\rangle$ получены k-частичные параболические уравнения типа Шрёдингера

$$\partial m_k/\partial t = H_k m_k = (\Delta_{x_1} + \ldots + \Delta_{x_k}) + [\sum_{i<j} V(x_i - x_j)]\, m_k.$$

Доказывается, что при $c_0(x) > 0$

$$\lim_{t\to\infty} \ln m_k/t = \gamma_k(\varkappa) = \max \operatorname{Sp} H_k.$$

Скорости роста $\gamma_k(\varkappa)$ можно интерпретировать как старшие показатели Ляпунова для оператора Шрёдингера H_k. Показано, что $\gamma_1(\varkappa) \equiv 0$, $\gamma_k(\varkappa) > 0$ при $\varkappa < \varkappa_k$ и равны нулю при больших $\varkappa$. Точки бифуркации $\varkappa_k$ неограниченно растут с ростом k и $\gamma_{k+1}/(k+1) > \gamma_k/k$ при $\varkappa \in [0, \varkappa_{k+1})$. Последнее неравенство означает «перемежаемость» решения c: при $t \to \infty$ появляется иерархия все более высоких и все более редко расположенных пиков, в которых сосредоточено практически все вещество. В фиксированной точке x решение не только не растет, но экспоненциально убывает при больших t.

3°. Уравнение эволюции магнитного поля в потоке несжимаемой проводящей жидкости (Лармор):

$$\partial H/\partial t = \nu_m \Delta H + \operatorname{rot}[v \times H], \qquad x \in \mathbb{R}^3.$$

Задача изучается в предположении, что имеется конечное время обновления τ. Анализ четных моментов $m_{2k} = \langle H^{2k}\rangle$ позволяет обнаружить явление перемежаемости магнитного поля типа описанного выше в п. 2°. Однако выборочный показатель Ляпунова

$$\tilde{\gamma}(\nu_m) = \lim_{t\to\infty} \ln |H(t, x)|/t$$

положителен при достаточно малых ν_m (динамо-теорема).

Методы расчета во всех трех моделях однотипны: теория стохастических интегралов, спектральные соображения и в п. 3° — обобщение центральной предельной теоремы на случай произведения независимых случайных операторов.

Заседание 6 марта 1985 г.

1. Ю. М. Сухов, А. Г. Шухов «Гидродинамическое приближение для эволюции состояний в статистической механике».

1°. Вопрос о выводе уравнений гидродинамики (уравнений Эйлера и Навье — Стокса), равно как и различных кинетических уравнений (уравнений Больцмана, Ландау, Власова), из гамильтоновых уравнений движения системы с большим (в пределе бесконечным) числом степеней свободы преобрел особую актуальность в связи с развитием строгих методов неравновесной статистической механики. Современная процедура вывода гидродинамических уравнений была предложена Ч. Морри [1] и основана на специальном «гидродинамическом» предельном переходе. В общем случае, однако, строгое проведение конструкции гидродинамического предельного перехода наталкивается на серьезные математические трудности, связанные, в частности, с проверкой эргодических свойств систем с бесконечным числом частиц (точнее, с решением задачи о сходимости к равновесному состоянию). В ряде «вырожденных» моделей такие свойства удается проверить, однако множество равновесных состояний здесь оказыватеся «аномально широким» (это связано с наличием большого количества интегралов движения). Вследствие этого конструкция гидродинамического предельного перехода для вырожденных моделей приводит к необычным «уравнениям Эйлера». Классические модели такого типа изучались в [2], [3].

2°. Настоящий доклад посвящен квантовым вырожденным моделям. Речь идет о квантовых моделях свободного движения, движения гармонических осцилляторов (или, более общо, «движения», задаваемого группой преобразований Боголюбова), а также одномерной модели XY и модели движения одномерных квантовых твердых стержней. Эти модели можно рассматривать как простейшие примеры квантовых вполне интегрируемых систем (с бесконечным числом степеней свободы). Как и в классических моделях, здесь возникают необычные «уравнения Эйлера»: в моделях свободного и гармонического движения —

уравнения переноса «нормальных мод» (для общих групп преобразований Боголюбова — волновые уравнения, описывающие независимые движения нормальных мод вдоль прямых в координатном пространстве); модель XY сводится с помощью переменных Йордана — Вигнера к преобразованиям Боголюбова; в модели одномерных твердых стержней возникает уравнение, аналогичное уравнению, изученному в [2]. Интересный факт, на наш взгляд, заключается в формальном совпадении классических и квантовых гидродинамических уравнений для соответствующих моделей. В связи с этим возникает вопрос о виде квантовых гидродинамических уравнений в общем случае. Было бы очень интересно выяснить, к каким уравнениям приводит процедура Морри для квантовых систем в общей ситуации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Morrey C. On the derivation of the equations of hydrodynamics from statistical mechanics.— Comm. Pure Appl. Math., 1955, v. 8, p. 279—326.
[2] Boldrighini C., Dobrushin R. L., Sukhov Yu. M. One-dimensional hard rod caricature of hydrodynamics.— Journ. Stat. Phys., 1983, v. 31, p. 577—615.
[3] Dobrushin R. L., Pellegrinotti A., Sukhov Yu. M., Triolo L. One dimensional harmonic lattice caricature of hydrodynamics.— Preprint, Camerino. University (Italy), 1984.

Заседание 27 марта 1985 г.

1. Б. Р. Вайнберг «Параметрикс и «почти спектральное» разложение для дифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$».

В работе обсуждается новая формула для параметрикса задачи Коши для гиперболических операторов. Пусть

$$L=\frac{\partial^2}{\partial t^2}-A\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right),\qquad A=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}+c(x)$$

— гиперболический оператор в $\mathbb{R}^n$ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, удовлетворяющий условию неловушечности. Последнее означает, что все отвечающие оператору L геометро-оптические лучи уходят на бесконечность. Пусть $a(x, p) = \sum a_{ij}(x)p_ip_j$, $p \in \mathbb{R}^n$; $\Lambda=\Lambda(y)$ — зависящее от параметра y и лежащее в $\mathbb{R}^{2n}_{(x,\,p)}$ n-мерное лагранжево многообразие, составленное из фазовых кривых задачи

$$\dot{x}=a'_p(x,\ p),\qquad \dot{p}=-a'_x(x,\ p);\qquad x(0)=y,\qquad p(0)=p^0,\qquad a(y,\ p^0)=1.$$

Пусть $K_{\Lambda,\lambda}$ — канонический оператор Маслова (КОМ), построенный по многообразию Λ (λ — большой параметр, участвующий в конструкции КОМ), и

$$g_\lambda(x,\ y)=\zeta(\lambda)\,K_{\Lambda,\sqrt{\lambda}}\Big[\sum_{j=0}^{N}\psi_j\lambda^{\frac{n-3}{4}-\frac{j}{2}}\Big],$$

где $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\zeta(\lambda) = 1$ при $\lambda > 2$, $\zeta(\lambda) = 0$ при $\lambda < 1$, функции $\psi_j \in C^\infty(\Lambda)$ удовлетворяют уравнениям переноса. Обычно КОМ используется для построения решений с начальными условиями, заданными при каждом $\lambda\gg1$. Из них вытекают начальные условия для функций ψ_j. В нашем случае начальные условия для ψ_j выбираются из интегрального соотношения

$$\int_0^\infty g_\lambda(x,\ y)\,d\lambda-\delta(x-y)\in C^{N-n}(\mathbb{R}^{2n}).\tag{1}$$

Доказательство существования указанных функций ψ_j является центральным местом работы.

Пусть $E = E(t,\ x,\ y)$ — функция Грина задачи Коши:

$$LE=0,\qquad t>0;\qquad E\,|_{t=0}=0,\qquad E'_t\,|_{t=0}=\delta(x-y).$$

Из (1) вытекает основное утверждение:

$$E=\int_0^\infty g_\lambda(x,\ y)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\,d\lambda+T(t,\ x,\ y),\qquad T\in C^{N+1-n}(\mathbb{R}^{2n+1}). \tag{2}$$

Формула (2) для параметрикса $\Phi\equiv E-T$ обладает следующими преимуществами по сравнению с известными ранее формулами.

1°. В (2) участвуют геометро-оптические лучи, выпущенные из одной точки $x=y$. Раньше с параметриксом связывались $(n+1)$-мерные лагранжевы многообразия, лежащие в расширенном фазовом пространстве. Соответственно, приходилось строить все лучи, выходящие из гиперплоскости $t=0$.

2°. Обычно параметрикс строится на конечном интервале оси t. Параметрикс, построенный в (2), определен при всех $t\geqslant 0$ и обладает вполне определенным поведением при $t\to\infty$: Φ и все его производные убывают быстрее любой степени t при $t\to\infty$, когда $(x,\ y)$ принадлежит любому компакту в $\mathbb{R}^{2n}$. Последнее обстоятельство особенно существенно при переходе к стационарным задачам.

3°. Формула (2) является аналогом выражения функции Грина E через спектральную функцию соответствующего стационарного оператора. Кроме того,

$$(-A)^j=\int_0^\infty \lambda^j G_\lambda\,d\lambda+T_j, \tag{3}$$

где G_λ — интегральный оператор с ядром $g_\lambda(x,\ y)$, а ядро оператора T_j принадлежит $C^{N-n-2j}(\mathbb{R}^{2n})$. Пусть оператор $(-A)$ самосопряжен и его спектр абсолютно непрерывен и неотрицателен. Тогда формулы (2), (3) справедливы при $T=T_j=0$, $g_\lambda=e'_\lambda$, где $e'_\lambda(x,\ y)$ — ядро оператора $dE_\lambda/d\lambda$ и $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство оператора $(-A)$. Таким образом, формулы (2), (3) могут заменить для несамосопряженного оператора A теорему о спектральном разложении в тех случаях, когда сглаживающие операторы несущественны.

Если оператор A самосопряжен и совпадает с оператором Лапласа при $|x|\gg 1$, то из (2) следует, что $g_\lambda=e'_\lambda+O(\lambda^{(-2N+2n-5)/4})$, $\lambda\to\infty$. Некоторые следствия отсюда, а также случай общих систем см. в работе автора в ДАН СССР, 1985, т. 282, № 2.

Заседание 3 апреля 1985 г.

1. В. И. Бахтин «Об усреднении в многочастотных системах».

Рассмотрим систему

$$\begin{cases}\dot I=\varepsilon f(I,\ \varphi,\ \varepsilon),\\ \dot\varphi=\omega(I)+\varepsilon g(I,\ \varphi,\ \varepsilon)\end{cases}$$

с гладкой правой частью, зависящей от параметра ε, где I изменяется в ограниченной области евклидова n-мерного пространства, а φ принадлежит тору размерности m.

Усредненной системой называется система $\dot I=\varepsilon f_0(I)$, где $f_0(I)$ — среднее значение по тору вектора $f(I,\ \varphi,\ 0)$.

Введем функцию $h(I^0,\ \varphi^0)$ от начального условия, равную максимуму отклонения I-компоненты решения первой системы от решения усредненной системы (с начальным условием I^0) на отрезке времени от нуля до ε^{-1}.

Т е о р е м а. 1) *Если ω не принадлежит некоторому множеству коразмерности N в функциональном пространстве, то мера множества начальных условий, при которых $h>r$, не превосходит $C(\omega)\varepsilon^{1/(k+1)}/r$ и интеграл от h по множеству остальных начальных условий не превосходит $C(\omega)\varepsilon^{1/(k+1)}$ при любом r, если $m\leqslant C^k_{n+k}-n-N+1$.*

2) *Для деформации ω (с достаточно большим числом параметров) общего положения при почти любом (в смысле меры Лебега) значении параметра $h>r$ на множестве начальных условий меры $\leqslant C\sqrt{\varepsilon}/r$ и интеграл от h по множеству остальных начальных условий $\leqslant C\sqrt{\varepsilon}$ (где C зависит от значения параметра).*

Эти утверждения подобны утверждениям теоремы А. И. Нейштадта [1]. Однако в условии не требуется независимости отношений частот ω как функций от I (это требование не позволяло применять теорему Нейштадта в случае, когда $m > n + 1$, а в случае $m \leqslant n + 1$ его теорема была применима не к системе общего положения, а лишь к системам из некоторого открытого в функциональном пространстве множества).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Нейштадт А. И. Об осреднении в многочастотных системах, II.— ДАН СССР, 1976, т. 226, № 6, с. 1295—1298.

Заседание 10 апреля 1985 г.

1. А. Д. Вайнштейн, Б. З. Шапиро «Особенности гиперболических многочленов и границы области гиперболичности».

Вещественная проективная алгебраическая гиперповерхность степени n в $\mathbb{R}P^m$ называется строго гиперболической, если для некоторой точки каждая проходящая через нее прямая пересекает гиперповерхность в n геометрически различных точках. Такая точка называется точкой гиперболичности. Множество всех строго гиперболических гиперповерхностей данной степени заполняет одну компоненту дополнения до дискриминанта в пространстве гиперповерхностей данной степени, называемую областью гиперболичности. Изучается вопрос об особенностях, которые могут возникать на границе области гиперболичности и на особых гиперповерхностях, лежащих на этой границе и называемых нестрого гиперболическими. Этот вопрос был поставлен В. И. Арнольдом. Ему же принадлежат гипотезы, доказанные ниже в следствии 2. Частичные результаты были получены ранее в [1], [2].

Лемма. *Особенности нестрого гиперболических гиперповерхностей принадлежат одному из трех типов*: 1-*й тип — особенности, для которых существует такое направление, что все близкие к нему прямые имеют постоянную кратность пересечения с ростком особенности*; 2-*й тип — особенности, ростки которых состоят из неособых мнимых ветвей, определяющих в вещественной плоскости изолированную точку*; 3-*й тип — особенности, переходящие в набор особенностей* 1-*го типа при одном* σ-*процессе с центром в особой точке*.

Теорема. *Пусть степень гиперповерхности* $n \geqslant \mu + 3k - 4$, *где* k — *количество особых точек, лежащих на гиперповерхности,* μ — *сумма их чисел Милнора. Тогда росток полной деформации гиперповерхности в пространстве всех гиперповерхностей той же степени позволяет независимо друг от друга версально деформировать каждую из особенностей.*

Следствие 1. *Росток дискриминанта в окрестности точки в пространстве гиперповерхностей, удовлетворяющей условиям теоремы, диффеоморфен цилиндру над объединением цилиндров над бифуркационными диаграммами нулей каждой из особенностей.*

Следствие 2. *Наборы типичных особенностей на гиперболических гиперповерхностях и особенности границы области гиперболичности, возникающие в семействах общего положения с фиксированным числом параметров, стабилизируются* (*с точностью до локальных диффеоморфизмов пространства параметров*) *как при росте размерности и степени гиперповерхности, так и при фиксированной размерности, когда растет только степень.*

Утверждение. *При числе параметров* $\leqslant 3$ *на гиперболической гиперповерхности реализуются следующие* (*мульти*) *особенности*: *один параметр* — A_1^+, A_1^-; *два параметра* — A_2, $A_1^+A_1^-$, $A_1^-A_1^-$; *три параметра* — A_3^-, $A_2A_1^-$, $A_1^-A_1^-A_1^-$, $A_1^+A_1^-A_1^-$. *Им соответствуют стандартные бифуркационные диаграммы версальных деформаций с отмеченными компонентами дополнения, в которых располагается область гиперболичности. В частности, для случая особенности* A_3^- *область гиперболичности соответствует компоненте дополнения до ласточкина хвоста в* $\mathbb{R}^3$, *соответствующей полиномам без корней.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Атья М. Ф., Ботт Р., Гординг Л. Лакуны для гиперболических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, I, II.— УМН, 1971, т. 26, вып. 2, с. 25—100; УМН, 1984, т. 39, вып. 3, с. 171—225.

[2] Nuij W. A note on hyperbolic polynomials.— Math. Scand., 1968, v. 23, № 1, p. 69—72.

Заседание 17 апреля 1985 г.

Заседание проводилось совместно с секцией математики научной конференции «Ломоносовские чтения».

1. В. А. Кондратьев, О. А. Олейник «Об асимптотическом поведении решений систем дифференциальных уравнений».

Рассматривается линейная эллиптическая система второго порядка с постоянными коэффициентами вида

$$(1)\qquad \sum_{j,\,k,\,l=1}^{N} a_{ijkl}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k\,\partial x_l}=f_i \qquad (i=1,\,2,\,\ldots,\,N),\qquad N\geqslant 2,$$

где $a_{ijkl}=\mathrm{const}$, $\det\Big(\sum_{k,\,l=1}^{N} a_{ijkl}\lambda_k\lambda_l\Big)\neq 0$, $\lambda\in\mathbb{R}^N\setminus 0$. Предполагается, что $x=(x_1,\ldots$ $\ldots,x_N)=(y,z)$, $y=(y_1,\ldots,y_p)$, $z=(z_1,\ldots,z_q)$, $p+q=N$, $p\geqslant 2$, $q\geqslant 0$, функции f_i, $u_i(i=1,\,2,\,\ldots,\,N)$ 1-периодичны по z. Пусть $Q=\{x\colon\ 0\leqslant z_i\leqslant 1,\ i=1,\,\ldots,\,q\}$. Рассматривается решение системы (1), такое, что

$$(2)\qquad E(u,\,u)=\int_Q\Big(\sum_{i,\,j=1}^{N}|e_{ij}|^2\Big)dx<\infty,\qquad e_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

а $f(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ и $f\equiv 0$ при $|y|$ достаточно больших. Частным случаем системы (1) является классическая система теории упругости. Рассматривается вопрос о поведении при $|y|\to\infty$ решения системы (1), удовлетворяющего условию (2). Аналогичный вопрос для решения общей эллиптической системы, обладающей конечным интегралом Дирихле по Q, рассматривался в работе [1]. Основной результат состоит в следующем.

Теорема 1. *Если u — 1-периодическое по z решение системы* (1) *в* $\mathbb{R}^N$, *удовлетворяющее условию* (2), *то*

$$u_s(x)=c_{0s}+\sum_{r=1}^{N}c_{sr}x_r+u_{0s}(x)\qquad (s=1,\,\ldots,\,N),\qquad c_{sr}=0\ \text{при}\ s>p,$$

где $C=(c_{sr})_{N\times N}$ — кососимметрическая матрица, а $|u_{0s}(x)|=O(|x|^{2-p})$ при $p>2$ и $u_{0s}(x)=O(|x|^{-1})$ при $p=2$.

Важную роль при доказательстве этой теоремы играет следующая лемма, являющаяся аналогом неравенства Корна в $\mathbb{R}^N$.

Лемма. *Если $E(u,\,u)<\infty$, то существуют $c_1,\ c_2=\mathrm{const}$, не зависящие от u, такие, что*

$$\int_{Q_\rho}\sum_{i,j=1}^{N}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\Big)^2dx\leqslant c_2(1+\rho^2)^{c_1},\quad Q_\rho=Q\cap\{x\colon|y|<\rho\}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кондратьев В. А., Олейник О. А. Об асимптотике на бесконечности решений эллиптических систем с постоянными коэффициентами.— УМН, 1985, т. 40, вып. 5, с. 223.

2. М. И. Вишик, С. Б. Куксин «Фредгольмовы многообразия и эллиптические квазилинейные уравнения».

Рассматриваются квазилинейные уравнения вида

$$(1)\qquad \Phi(u(x),V(x))\equiv-\Delta u+V(x)u-f(u,\,\nabla u,\,x)=0,$$

где $u(x)\in W_p^2(\Omega)\cap \overset{0}{H}{}^1(\Omega)\equiv B_1$, $p>n$, $f(u,\,\zeta,\,x)\in C^k(\mathbb{R}^{n+1}_{u,\,\zeta}\times\overline{\Omega})$, $k\geqslant 1$. Предполагается, что $V(x)\in W_p^1(\Omega)\equiv B_2$. Уравнение (1) рассматривается как соотношение между $u(x)$ и $V(x)$ в пространстве $\mathscr{H}=B_1\times B_2$. Всевозможные $(u(x),\ V(x))\in\mathscr{H}$, удовлетворяющие уравнению $\Phi(u,\ V)=0$, причем $u\not\equiv 0$, образуют многообразие Ψ.

Теорема 1. *Пусть функция f в* (1) *удовлетворяет сформулированным выше условиям, причем при $f(0,\,0,\,x)\equiv 0$ $k\geqslant 1$, а при $f(0,\,0,\,x)\not\equiv 0$ $k\geqslant 2$. Тогда:* 1) *многообразие*

Ψ является квазиконечномерным фредгольмовым многообразием гладкости C^k с модельным пространством, изоморфным B_2. Это означает, что оператор перехода от одной координатной окрестности к другой задается квазиконечномерным оператором $A+W+T(W)$, где $A \in B_2$ — постоянный вектор, а $T(W)$ — конечномерный оператор гладкости C^k. 2) *Отображение проектирования π: $\Psi \to B_2$, $(u,V) \mapsto V$ в координатах карты является квазиконечномерным и счетно-собственным* (т. е. прообраз компакта есть счетное объединение компактов); $\operatorname{ind} \pi = 0$.

Напомним, что точка $y=(u_0, V_0) \in \Psi$ называется *регулярной для отображения* π, *если оператор $d\pi(y_0)$: $Ty_0(\Psi) \to B_2$ сюръективен.* Так как $\operatorname{ind} d\pi(y_0)=0$, то в регулярной точке y_0 $d\pi(y_0)$ — изоморфизм. Точка $V \in B_2$ называется *регулярным значением отображения* π, *если все точки $\pi^{-1}(V)$ регулярны.* (В частности, если $\pi^{-1}(V)=\varnothing$.)

Теорема 2. *Множество $R(\pi)$ регулярных значений оператора π является существенным в B_2, т. е.* 1) *оно второй категории*; 2) *оно имеет полную меру относительно любой гауссовой меры $\tilde{\mu}$ на B_2, индуцированной на B_2 цилиндрической гауссовой мерой μ на гильбертовом пространстве H, $H \subset B_2$ с единичным корреляционным оператором. При этом предполагается, что $\|\cdot\|_{B_2}$ — измеримая функция на H.*

Аналогичные утверждения имеют место для задачи о собственных значениях:

$$-\Delta u+V(x)u-\lambda(a(x)\,|u|^{\varkappa-1}u+g(u,\nabla u,x))=0, \quad u \in B_1, \tag{2}$$

$$\langle -\Delta u+V(x)u,\, u\rangle = s, \tag{3}$$

где $a(x) \in C^1(\overline{\Omega})$, $a(x) \geqslant \alpha^2>0$, $\varkappa \geqslant 2$, $\varkappa(n-2)<n+2$. Обозначим через B_2^+ множество тех $V(x) \in B_2$, для которых $-\Delta+V>0$ на B_1. Задаче (2), (3) сопоставляется многообразие Ψ^* элементов $(u, V, \lambda, s) \in B_1 \times B_2 \times \mathbb{R}_\lambda \times \mathbb{R}_s$, удовлетворяющих (2) и (3), причем $s>0$. Через Ψ_0^* обозначается многообразие, соответствующее (2), (3) при $g \equiv \equiv 0$. Для Ψ^* и Ψ_0^* имеют место аналоги теорем 1, 2. Обозначим через $G(\varepsilon, u, \zeta, x)$ функцию, равную $\varepsilon^\varkappa g(u/\varepsilon, \zeta/\varepsilon, x)$ при $\varepsilon \neq 0$ и равную нулю при $\varepsilon=0$.

Теорема 3. *Пусть $V=V_0 \in B_2^+$ — регулярное значение оператора проектирования π: $\Psi_0^* \cap \{s=1\} \to B_2$, $(u_0, V_0, \lambda, 1) \mapsto V_0(x)$ (такие $V_0(x)$ образуют существенное множество в B_2^+). Пусть далее отображение $\mathbb{R}^{n+2}_{u,\zeta,\varepsilon} \to L_p(\Omega)$, $(\varepsilon, u, \zeta) \mapsto a(x)\,|u|^{\varkappa-1}u+ +G(\varepsilon, u, \zeta, x)$ имеет гладкость C^l, $l \geqslant 1$. Тогда задача* (2), (3) *имеет счетное число решений $u_r=u_r(x; s)$, $\lambda_r=\lambda_r(s)$ $(r=1, 2, \ldots)$, каждое из которых определено при $s>s_r$. При этом $u_r \in C^l((s_r, \infty); B_1)$, $\lambda_r \in C^l(s_r, \infty)$ и при $s \to \infty$ имеют место следующие асимптотические формулы*:

$$\| u_r(\cdot, s)-(s^{(1-0)/2}w_r^0(\cdot)+\ldots+s^{(1-l)/2}w_r^l(\cdot))\|_{B_1}=o(s^{(1-l)/2}),$$

$$|\lambda_r(s)-(s^{(\varkappa-1-0)/2}\mu_r^0+\ldots+s^{(\varkappa-1-l)/2}\mu_r^l)|=o(s^{(\varkappa-1-l)/2}).$$

Здесь $w_r^j \in B_1$, $\mu_r^j \in \mathbb{R}$ $(j=1, \ldots, l;\ r=1, 2, \ldots)$ и (w_r^0, μ_r^0) — решение задачи (2), (3) *при $s=1$, $g \equiv 0$.*

Теорема 4. *Пусть в* (2) *λ фиксировано: $\lambda=b>0$, и выполнены условия теоремы 3. Тогда найдется такая последовательность чисел $b_1>b_2>\ldots>0$, что при $0<b<b_j$ задача* (2) *имеет не менее чем j различных решений.*

3. С. Н. Кружков, А. Г. Королёв «Теоремы вложения анизотропных функциональных пространств и их применение в теории нелинейных уравнений».

4. Б. Р. Вайнберг «Асимптотическое разложение спектральной функции дифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$».

Содержание доклада опубликовано в [1], [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Вайнберг Б. Р. О параметриксе и асимптотике спектральной функции дифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$.— ДАН СССР, 1985, т. 282, № 2, с. 265—269.

[2] Вайнберг Б. Р. Параметрикс и «почти спектральное» разложение для дифференциальных операторов в $\mathbb{R}^n$.— УМН, 1985, т. 40, вып. 5, с. 303—304.

5. Ю. С. Ильяшенко «Нормальные формы локальных семейств дифференциальных уравнений».