

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. D. Vainshtein, B. Z. Shapiro, Structure of a set of  $\bar{a}$ -representable numbers, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1980, Number 5, 8–11

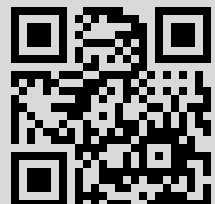
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 217.215.159.7

February 3, 2019, 01:13:33



А. Д. Вайнштейн, Б. З. Шапиро

УДК 510.22

**О СТРОЕНИИ МНОЖЕСТВА  $\bar{a}$ -ПРЕДСТАВИМЫХ ЧИСЕЛ**

Рассмотрим последовательность  $\bar{a} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ , для которой выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i < \infty, \quad a_i \geq a_{i+1} > 0. \tag{1}$$

Плотностью множества  $K \subseteq \mathbb{Z}^+$  по последовательности  $\bar{a}$  назовем величину  $\rho(K) = \sum_{i \in K} a_i : \sum_{i=1}^{\infty} a_i$ . Обозначим через  $I$  интервал  $(0, 1)$ , а через  $\bar{I}$  — его замыкание. Таким образом, для каждой последовательности, удовлетворяющей (1), определено отображение  $\rho: 2^{\mathbb{Z}^+} \rightarrow \bar{I}$ . Числа из множества  $P = \rho(2^{\mathbb{Z}^+})$  естественно называть  $\bar{a}$ -представимыми. В работе [1] Какея доказал, что множество  $P$  совершенно, и выдвинул несколько гипотез о его строении. В дальнейшем его исследования были продолжены и обобщены в [2], [3], [4] — [8]. В данной работе изучаются некоторые новые свойства отображения  $\rho$ .

*Замечание.* Очевидно, что для последовательностей  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  и  $\{ma_i\}_{i=1}^{\infty}$ ,  $m > 0$ , отображения  $\rho$  совпадают, поэтому в дальнейшем мы будем без ограничения общности считать, что  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$ .

Изучим сначала более детально строение множества  $P$ .

**Теорема 1.** *Для того чтобы  $P$  совпадало с  $\bar{I}$ , необходимо и достаточно, чтобы для каждого члена последовательности выполнялось неравенство*

$$a_n \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i = r_n. \tag{*}$$

*Доказательство.* **Необходимость.** Пусть найдется  $k$  такое, что  $a_k > r_k$ . Перепишем это неравенство в виде

$$a_k > r_{k-1}/2 \tag{2}$$

и рассмотрим  $s = 1 - r_{k-1}/2 \in \bar{I}$ . Пусть  $M \subseteq \mathbb{Z}^+$  есть множество такое, что  $\rho(M) = s$ . Докажем, что  $\{1, 2, \dots, k\} \subseteq M$ . Действительно, если  $0 < m \leq k$ ,  $m \notin M$ , то из (2)  $\rho(M) \leq 1 - a_m \leq 1 - a_k < 1 - r_{k-1}/2 = s$ . С другой стороны, если  $\{1, 2, \dots, k\} \subseteq M$ , то из (2)  $\rho(M) \geq \rho(\{1, 2, \dots, k\}) = 1 + a_k - r_{k-1} > 1 - r_{k-1}/2 = s$ . Полученное противоречие доказывает необходимость условия (\*).

**Достаточность.** Доказательство достаточности проводится аналогично приведенному в [9] (с. 213).

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение, доказательство которого представляется очевидным.

**Лемма 1.** *Пусть  $M_n = \{M \subseteq \mathbb{Z}^+ \mid \{1, 2, \dots, n\} \cap M = \emptyset\}$ ,  $P_n = \rho(M_n)$ . Тогда  $P_{n-1} = P_n \cup (a_n + P_n)$ , где  $a_n + P_n = \{s \mid s - a_n \in P_n\}$ .*

Теперь мы можем обобщить одно из утверждений предыдущей теоремы.

**Теорема 2.** Пусть, начиная с некоторого  $N$ , для каждого члена последовательности выполняется неравенство  $a_n \leq r_n$ . Тогда  $P$  представляется в виде объединения конечного числа отрезков, и лебегова мера  $P$  равна

$$\mu(P) = 2^{N-1} r_{N-1} - \sum_{i=1, a_i < r_i}^{N-1} 2^{i-1} (r_i - a_i).$$

**Доказательство.** Из теоремы 1 вытекает, что  $P_{N-1} = [0; r_{N-1}]$ ,  $\mu(P_{N-1}) = r_{N-1}$ . Теперь из леммы 1 следуют оба утверждения теоремы.

Для случая  $a_n > r_n$  авторами также получены некоторые результаты, обобщающие основную теорему работы [5].

**Теорема 3.** Пусть, начиная с некоторого  $N$ , для каждого члена последовательности выполняется неравенство  $a_n > r_n$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

- (I)  $P$  гомеоморфно канторову множеству;
- (II) существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n r_n = r$ , и мера  $P$  удовлетворяет неравенству

$$[(N+1)/2^N] r \leq \mu(P) \leq r.$$

**Доказательство.** Сначала докажем утверждение (I) теоремы для  $N=1$ . Пусть

$$\Phi_{10} = \{s \in I \mid r_1 < s < a_1\},$$

$$\Phi_{20} = \{s \in I \mid r_2 < s < a_2\}, \quad \Phi_{21} = \{s \in I \mid a_1 + r_2 < s < a_1 + a_2\},$$

.....

$$\Phi_{n0} = \{s \in I \mid r_n < s < a_n\}, \dots, \Phi_{n2^{n-1}} = \left\{ s \in I \mid \sum_{i=1}^{n-1} a_i + r_n < s < \sum_{i=1}^n a_i \right\},$$

.....

Положим  $\Phi_n = \bigcup_{i=0}^{2^n-1} \Phi_{ni}$ ,  $\Phi = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi_n$ . Очевидно  $\Phi \cap P = \emptyset$ . Докажем, что

$P = \bar{I} \setminus \Phi$ . Действительно, пусть  $p \in \bar{I} \setminus \Phi$ , тогда найдется  $n_1$  такое, что  $a_{n_1} \leq p \leq a_{n_1-1}$  (при этом будем полагать  $a_0 = 1$ ). Кроме того,  $a_{n_1} + r_{n_1} > p$  (иначе выполнялось бы  $r_{n_1-1} < p < a_{n_1-1}$ , откуда  $p \in \Phi_{n_1-1} \subset \Phi$ ). Следовательно, можно выбрать  $k_1$  так, чтобы  $\sum_{i=n_1}^{n_1+k_1} a_i \leq p \leq \sum_{i=n_1}^{n_1+k_1+1} a_i$ . Далее по аналогичным

соображениям  $\sum_{i=n_1}^{n_1+k_1} a_i + r_{n_1+k_1} > p$ , и можно перейти к следующему шагу.

На  $m$ -м шаге имеем

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=n_i}^{n_i+k_i} a_j \leq p < \sum_{i=1}^m \sum_{j=n_i}^{n_i+k_i} a_j + a_{n_m+k_m+1},$$

откуда следует, что  $p \in P$ .

Таким образом,  $P = \bar{I} \setminus \Phi$ . Кроме того,  $P$  не содержит в себе интервалов, т. к.  $P$  можно представить в виде  $P = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bar{I} \setminus \Phi_n)$ , а  $\bar{I} \setminus \Phi_n$  не содержит интервалов длины большей, чем  $r_n$ . Следовательно,  $P$  — совершенное всюду разрывное множество. Согласно [10] оно гомеоморфно канторову множеству.

Пусть теперь  $N > 1$ . Тогда  $P_{N-1}$  гомеоморфно канторову множеству, и  $P$ , согласно лемме 1, представляется в виде объединения конечного числа нигде неплотных множеств. Таким образом,  $P$  — совершенное нигде неплотное множество, следовательно, оно гомеоморфно канторову множеству.

(II). Существование предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n r_n$  очевидно (см., напр., [5]).

Пусть  $N=1$ ; тогда  $\Phi_{ni} \cap \Phi_{nj} = \emptyset$  при  $i \neq j$  и  $\mu(\Phi_n) = 1 - 2^n r_n$ ,  $\mu(\Phi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Phi_n) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n r_n = 1 - r$ , следовательно,  $\mu(P) = r$ . Пусть теперь  $N > 1$ ; тогда  $\mu(P_N) = r/2^N$ . Далее из леммы 1 получим  $\forall n \leq N$

$$\begin{aligned} \mu(P_{n-1}) &= \mu(P_n) + \mu(a_n + P_n) - \mu(P_n \cap (a_n + P_n)) = \\ &= 2\mu(P_n) - \mu(P_n \cap (a_n + P_n)). \end{aligned} \quad (3)$$

Очевидно,  $\mu(P_n \cap (a_n + P_n)) \geq 0$  (равенство достигается, напр., при  $a_n \geq r_n$ ) и  $\mu(P_n \cap (a_n + P_n)) \leq \mu(P_n) - \mu(P_N)$  (действительно, из (1) и условия теоремы следует, что  $\mu(P_n \setminus (a_n + P_n)) \leq \mu(P_N)$ , равенство достигается при  $a_1 = a_2 = \dots = a_N$ ).

Подставляя эти неравенства в (3), получим

$$\mu(P_n) + \mu(P_N) \leq \mu(P_{n-1}) \leq 2\mu(P_n). \quad (4)$$

Применяя (4) необходимое число раз, получим  $[(N+1)/2^N]r \leq \mu(P) \leq r$ , что и требовалось доказать.

В работе [1] была выдвинута гипотеза о том, что необходимым и достаточным условием нигде неплотности множества  $P$  является существование счетного числа членов последовательности, для которых  $a_i > r_i$ . Следующий пример убеждает нас в том, что эта гипотеза неверна. Положим  $a_{5n+1} = 0,24 \cdot 10^{-n}$ ,  $a_{5n+2} = 0,21 \cdot 10^{-n}$ ,  $a_{5n+3} = 0,18 \cdot 10^{-n}$ ,  $a_{5n+4} = 0,15 \cdot 10^{-n}$ ,

$a_{5n+5} = 0,12 \cdot 10^{-n}$ . Тогда  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 1$  и  $a_{5n+5} > r_{5n+5} = 0,1 \cdot 10^{-n}$ . Кроме того, не-

трудно показать, что отрезок  $[2/15, 13/15]$  целиком принадлежит  $P$ . Таким образом, вопрос о необходимом и достаточном условии нигде неплотности  $P$  остается открытым.

Рассмотрим теперь круг вопросов, связанных с мощностью прообразов точек из  $P$ .

Обозначим через  $I_\alpha$  множество точек  $p \in \bar{I}$ , для которых мощность множества  $\{K \subseteq \mathbb{Z}^+ \mid \rho(K) = p\}$  равна  $\alpha$ . Тогда, напр.,  $I_0 = \bar{I} \setminus P$  и теоремы 1–3 описывают строение множества  $I_0$ .

Ниже будут доказаны некоторые аналоги теоремы 1 для множества  $I_c$ .

**Теорема 4.** Пусть  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  — последовательность, удовлетворяющая условию  $a_n < r_n$ , и пусть существует такое множество  $K \subset \mathbb{Z}^+$ , что

(I)  $K$  и  $\mathbb{Z}^+ \setminus K$  счетны;

(II) последовательность  $\{a_i\}_{i \in K}$  удовлетворяет условию (\*).

Тогда  $I_c = I = (0, 1)$ .

Доказательству теоремы предположим следующую лемму.

**Лемма 2.** Пусть  $K \subset \mathbb{Z}^+$  — множество, удовлетворяющее условиям (I) и (II) теоремы 4, и  $p \in I$ . Тогда найдется  $K^* \subset \mathbb{Z}^+$ , также удовлетворяющее (I) и (II), такое, что  $\rho(K^*) > p$ .

**Доказательство.** Пусть  $m = \min_{n \in K} n$  и  $m > 1$ . Докажем, что найдется

множество  $K_m$ , удовлетворяющее (I) и (II), такое, что  $(K \cup \{m-1\}) \subseteq K_m$ . Если  $K \cup \{m-1\}$  само удовлетворяет (I) и (II), то утверждение очевидно. Предположим, что это не так, т. е.  $a_{m-1} > \rho(K)$ . Поскольку  $a_{m-1} < r_{m-1}$ , то найдется конечное множество  $H_m \subset \mathbb{Z}^+ \setminus K$  такое, что  $\rho(H_m) > r_{m-1} - a_{m-1}$ , и тогда  $K \cup H_m \cup \{m-1\}$  — искомое множество  $K_m$ . Применяя аналогичное построение  $(m-1)$  раз, получим множество  $K_2$ , удовлетворяющее (I) и (II), и при этом  $1 \in K_2$ . Заметим теперь, что если  $K$  удовлетворяет условиям

(I) и (II),  $l, k \in K$ ,  $l < n < k$ , то  $K \cup \{n\}$  также удовлетворяет этим условиям. Поэтому, если  $\rho(K_2) < p$ , выберем конечное множество  $H \subset \mathbf{Z}^+ \setminus K_2$  так, чтобы  $\rho(H) > p - \rho(K_2)$ , и тогда множество  $K_2 \cup H$  удовлетворяет условиям леммы.

Доказательство теоремы 4. Пусть  $K$  — множество, удовлетворяющее условиям теоремы. Докажем, что  $(0; \rho(K)] \subset I_c$ . Действительно, пусть  $p \in (0; \rho(K)]$ . Рассмотрим  $S_p^* = \{S \subset \mathbf{Z}^+ \setminus K \mid \rho(S) \leq p\}$ . Очевидно,  $S_p^*$  имеет мощность континуума. Кроме того, для любого  $S \in S_p^*$   $p - \rho(S) \in (0, \rho(K)]$ . В силу теоремы 1 найдется  $T \subseteq K$  такое, что  $\rho(T) = p - \rho(S)$ . Тогда  $\rho(T \cup S) = p$  и  $S$  можно выбрать континуумом способов, следовательно,  $p \in I_c$ . Теперь утверждение теоремы вытекает из леммы 2 и симметричности  $I_c$  относительно середины отрезка  $\bar{I}$ .

Из доказанной теоремы легко получается следующая

Теорема 5. Пусть  $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$  удовлетворяет условию  $(*)$  и, начиная с некоторого  $N$ , для каждого члена последовательности выполняется неравенство

$$a_n < r_{n+1}. \quad (5)$$

Тогда  $I_c = I$ .

Доказательство. Построим множество, удовлетворяющее условиям теоремы 4. Положим  $F_1 = \{N\}$ . Пусть построено множество  $F_m$  и  $m^* = \max_{n \in F_m} n$ . В силу условия (5) найдется конечное множество  $H_m \in M_{m^*+1}$  такое, что  $a_{m^*} < \rho(H_m)$ . Положим  $F_{m+1} = F_m \cup H_m$ . Докажем, что  $F = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m$  удовлетворяет условиям теоремы 4. Очевидно, что  $F$  счетно. Кроме того,  $\mathbf{Z}^+ \setminus F$  также счетно, т. к.  $\{m^*\}_{m \in \mathbf{Z}^+} \subseteq \mathbf{Z}^+ \setminus F$  и счетно. Наконец, по построению  $\{a_i\}_{i \in F}$  удовлетворяет  $(*)$ . Таким образом, условия теоремы 4 выполнены, следовательно,  $I_c = I$ .

В заключение авторы выражают глубокую благодарность М. С. Штильману за постановку задачи и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Kakeya S. On the partial sums of an infinite series. Tôhoku sc. rep., v. 3, № 4, 1914, p. 159—164.
2. Banerjee C. R., Lahiri B. K. On subseries of divergent series. Amer. J. Math., v. 71, № 7, 1964, p. 767—775.
3. Ganguli P. L., Lahiri B. K. Some results on certain sets of series. Czechosl. Mat. J., v. 18, № 4, 1968, p. 598—611.
4. Lahiri B. K. On series with real terms. Rev. Roum. Math. Pures et Appl. (R. P. R.), v. 18, № 6, 1973, p. 915—921.
5. Menon P. K. On a class of perfect sets. Bull. Amer. Math. Soc., v. 54, № 8, 1948, p. 706—710.
6. Šalat T. O istých vlastnostiach radov s kladnými členmi. Acta Fac. rerum natur. Univ. Comenianae. Math., v. 2, № 1—2, 1957, p. 71—76.
7. Šalat T. O istých priestoroch radov s bairovskou metrikou. Mat.-fuz. časop., SAV, v. 7, № 4, 1957, p. 193—206.
8. Šalat T. On subseries. Math. Z., v. 85, № 3, 1964, p. 209.
9. Пойа Д., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Ч. I. Ряды. Интегральное исчисление. Теория функций. М.—Л., Гостехиздат, 1956.
10. Александров П. С., Колмогоров А. Н. Введение в теорию функций действительного переменного. М.—Л., ГОНТИ, 1938.