О ЧИСЛЕ КОМПОНЕНТ ПРОСТРАНСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ СТЕПЕНИ n С $2n$ РАЗЛИЧНЫМИ КРИТИЧЕСКИМИ ЗНАЧЕНИЯМИ

Б. Шапиро

§1. Введение.

В раборе [1], с. 38 В. И. Арнольд сформулировал следующую гипотезу.

Гипотеза. Число компонент связности пространства $\widetilde{Tg}_n$ тригонометрических многочленов степени n, имеющих $2n$ различных вещественных критических значения, совпадает с числом компонент связности пространства $\mathcal{P}_{2n}$ всех гладких функций на окружности с тем же свойством (т.е. имеющих ровно $2n$ различных критических значения).

Согласно [1] последовательность card $\pi_0(\mathcal{P}_{2n})$ совпадает с последовательностью чисел Эйлера E_n. (Например, $E_1 = 1, E_2 = 2, E_3 = 16$. Заметим, что при указании E_i для малых i в [1], с. 38 допущена описка и приведены значения их антипериодических аналогов.) В этой короткой заметке мы докажем сформулированную выше гипотезу.

Пусть X_{2n} (соотв. $\overline{X}_{2n}$) обозначает пространство циклически упорядоченных наборов из $2n$ вещественных чисел, удовлетворяющих условию, что каждое число строго (соотв. нестрого) больше или строго (соотв. нестрого) меньше двух своих соседей. Через $\widetilde{X}_{2n}$ обозначим подмножество наборов из попарно различных чисел. Введем пространство $Tg_n \supset \widetilde{Tg}_n$, состоящее из тригонометрических полиномов с $2n$ различными критическими точками (но не обязательно различными значениями) и пространство $\overline{Tg}_n$, состоящее из тригонометрических многочленов с $2n$ критическими точками с учетом кратности. Очевидно, $\overline{Tg}_n \supset Tg_n \supset \widetilde{Tg}_n$, и проективизация (т.е. фактор по умножению на ненулевые скаляры) пространства $\overline{Tg}_n$ компактна. Зададим отображение $\Psi_n : \overline{Tg}_n \to \overline{X}_{2n}$, сопоставляющее каждому полиному из $\overline{Tg}_n$ циклически упорядоченный набор его критических значений. Если критическое значение кратно, то его надо повторить столько раз, какова кратность. (Ограничение отображения Ψ_n на подпространства в $\overline{Tg}_n$ будем обозначать той же буквой. В этой заметке термин 'полином' всегда означает тригонометрический полином.)

Предложение. *Отображение $\Psi_n : \widetilde{Tg}_n/S^1 \to \widetilde{X}_{2n}$ - гомеоморфизм пространства $\widetilde{X}_{2n}$ и факторпростарнства пространства $\widetilde{Tg}_n$ по действию окружности S^1 поворотами.*

Следствие. *Гипотеза Арнольда верна. Компоненты пространства $\widetilde{Tg}_n$ (или $\widetilde{Tg}_n/S^1$) нумеруются циклическими* updown-*последовательстями длины* $2n$, ср. [2].

Доказательству основного предложения посвящен следующий параграф. Две приведенные ниже гипотезы представляются автору естественным развитием тематики.

Гипотеза 1. Отображение Ψ_n задает гомеоморфизм пространств Tg_n/S^1 и X_{2n}.

Рассмотрим любую систему Чебышева из $2n+1$ периодических функций $f_1, ..., f_{2n+1}$ и выделим в линейном пространстве, натянутом на $f_1, ..., f_{2n+1}$, подмножество Ω, состоящее из всех функций с $2n$ различными критическими значениями.

Гипотеза 2. Число компонент связности множества Ω равно числу Эйлера E_n.

После того как настоящая заметка была закончена и отослана в редакцию, автор получил от В. И. Арнольда статью [3], в которой доказывается (среди прочего) та же гипотеза, но совершенно отличными методами. Возможное преимущество излагаемого ниже подхода состоит в том, что он, по-видимому, позволяет перечислить все компоненты связности пространства тригонометрических многочленов с попарно различными критическими значениями а также изучить случай произвольных чебышевских систем функций. Автор благодарен своему брату и соавтору М. Шапиро за обсуждение приведенной выше гипотезы Арнольда и ряд важных наблюдений, существенно улучшивших формулировки и экспозицию материала.

§2. Доказательства.

Доказательство основного предложения состоит из следующих трех этапов:

а) отображение $\Psi_n : \widetilde{Tg}_n/S^1 \to \widetilde{X}_{2n}$ открыто, т.е. является локальным гомеоморфизмом на образ;

б) отображение $\Psi_n : \widetilde{Tg}_n/S^1 \to \widetilde{X}_{2n}$ - накрытие;

в) степень этого накрытия равна 1, т.е. Ψ_n - гомеоморфизм.

Обозначения. Рассмотрим произвольный тригонометрический полином $g \in \widetilde{Tg}_n$. Обозначим через $(t_1, ..., t_{2n}), (c_1, ..., c_{2n})$ циклически упорядоченные критические точки и соответствующие критические значения g. (Иногда мы будем явно указывать зависимость от g.) Пространство T_n всех тригонометрических полиномов степени не выше n есть чебышевская система функций, см. например [4]. Из этого следует, в частности, что для любого $i = 1, ..., 2n$ найдется однопараметрическое семейство полиномов $p^{\alpha}_{g,i} \in T_n$, удовлетворяющих условиям: $p^{\alpha}_{g,i}(t_j) = 0$ для всех $j \neq i$ и $p^{\alpha}_{g,i}(t_i) = 1$, см. [4]. Параметр α пробегает аффинную прямую в пространстве T_n. Очевидно, что каждый $p^{\alpha}_{g,i}$ принадлежит $\overline{Tg}_n$.

Доказательство а). Рассмотрим произвольный $g \in \widetilde{Tg}_n$ и выберем некий конкретный $p^{\alpha}_{g,i}$. Возьмем семейство $g + \lambda p^{\alpha}_{g,i}$ и вычислим $\frac{dc_j(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0}$, где $c_j(\lambda)$ - критическое значение полинома $g + \lambda p^{\alpha}_{g,i}$, близкое к c_j. (Оно корректно определено при малых λ.) Легко видеть, что $\frac{dc_j(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0} = 0$ для всех $j \neq i$ и $\frac{dc_i(\lambda)}{d\lambda}|_{\lambda=0} = 1$ для любого фиксированного значения α. Тем самым, отображение $\Psi_n : \widetilde{Tg}_n \to \widetilde{X}_{2n}$ является субмерсией, и прообраз точки из $\widetilde{X}_{2n}$ есть объединение орбит действия S^1 на $\widetilde{Tg}_n$ поворотами.

□

Замечание 0. В действительности, это рассуждение доказывает открытость локально определенного отображения трансверсали к действию поворотов в окрестности любого полинома $g \in Tg_n$ на произвольным образом упорядоченное множество его критических значений.

Доказательство б). Разобьем рассуждение на следующие шаги.

Наблюдение 1. Любые две L^p-метрики эквивалентны на пространства T_n всех тригонометрических многочленов степени не выше n. Это означает, что для любых p и $q \in [1, \infty)$ существуют константы $\Gamma_{p,q} > \gamma_{p.q} > 0$, зависящие от p, q, n, такие что для любого $g \in T_n$, отличного от тождественного нуля, имеет место неравенство

$$0 < \gamma_{p,q} \leq \frac{L^p(g)}{L^q(g)} \leq \Gamma_{p,q} < \infty.$$

(Точные значения $\Gamma_{p,q} > \gamma_{p.q} > 0$ несущественны для дальнейшего.)

Лемма 2. Для любого $g \in \widetilde{Tg}_n$ с циклическим набором критических точек и значений $(t_1, ..., t_{2n}), (c_1, ..., c_{2n})$ соотв., удовлетворяющих условию $\min_k |t_k - t_{k-1}| > \epsilon > 0$, и любого $i = 1, ..., 2n$ найдется такое значение α, что тригонометрический полином $p^\alpha_{g,i}$ из указанного выше семейства имеет L^1-норму не больше константы $\kappa_n(\epsilon) = \frac{k_n}{(\epsilon(24-\epsilon^2))^{\frac{n(n-1)}{2}}}$, где k_n - некая константа, зависящая только от n.

Доказательство. Очевидно, что L^1-норма полинома $p^\alpha_{g,i} = \sum_i a_i \sin ix + b_i \cos ix + c$ не превышает $\sum_i(|a_i| + |b_i|) + |c|$. Оценим сверху последнюю величину. Заметим, что полином $p^\alpha_{g,i}$ обязательно имеет $2n$ вещественных корней, $2n-1$ из которых совпадают с $t_1, ..., \hat{t}_i, ..., t_{2n}$, а последний - любое число, отличное от t_i. Выберем последний корень t_{2n+1} так, чтобы для новой системы из $2n+1$ корня $t_1, ..., t_i, ..., t_{2n}, t_{2n+1}$ выполнялось условие $\min_i |t_l - t_{l-1}| > \frac{\epsilon}{2}$. Тогда $p^\alpha_{g,i}$ определен однозначно системой из $2n+1$ условия: $p^\alpha_{g,i}(t_j) = 0,\ j \neq i, \quad p^\alpha_{g,i}(t_i) = 1$. Коэффициент a_j (b_j соотв.) равен $\frac{\Delta^1_j}{\Delta}$ ($\frac{\Delta^2_j}{\Delta}$ соотв.), где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sin t_1 & \cos t_1 & \sin 2t_1 & \cos 2t_1 & \dots & \sin nt_1 & \cos nt_1 & 1 \\ \sin t_2 & \cos t_2 & \sin 2t_2 & \cos 2t_2 & \dots & \sin nt_2 & \cos nt_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & 1 \\ \sin t_{2n+1} & \cos t_{2n+1} & \sin 2t_{2n+1} & \cos 2t_{2n+1} & \dots & \sin nt_{2n+1} & \cos nt_{2n+1} & 1 \end{vmatrix},$$

а Δ^1_j (Δ^2_j соотв.) получается заменой в вышеприведенной матрице $(2j-1)$-го (соотв. $2j$-го) столбца на $(0, 0, ..., 0, 1)$. Заметим, что для Δ имеется явная формула

$$\Delta = l_n \Pi_{i<j} \sin \frac{t_i - t_j}{2},$$

где l_n - некоторая константа. Имеем, $\Delta^k_j \leq (\sqrt{n+1})^{2n+1},\ k = 1, 2$, поскольку длина каждого столбца (строки) вышеприведенной матрицы не больше $\sqrt{n+1}$. Из формулы для Δ и разложения синуса в ряд получаем для $\epsilon < 1$ неравенство $|\Delta| \geq l_n(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^3}{48})^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Окончательно получаем, что $|a_i|$ и $|b_i|$ не превышают $\frac{(\sqrt{n+1})^{2n+1}}{l_n(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^3}{48})^{\frac{n(n-1)}{2}}}$. Аналогично, $|c| \leq \frac{(\sqrt{n+1})^{2n+1}}{l_n(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^3}{48})^{\frac{n(n-1)}{2}}}$, и L^1-норма функции $p^\alpha_{g,i}$ не превышает $\kappa_n(\epsilon) = (2n+1)\frac{(\sqrt{n+1})^{2n+1}}{l_n(\frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon^3}{48})^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \frac{k_n}{(\epsilon(24-\epsilon^2))^{\frac{n(n-1)}{2}}}$.

□

Рассмотрим L^∞-норму на пространстве T_n всех тригонометрических полиномов степени не выше n.

Лемма 3. Пусть $g \in \widetilde{Tg}_n$ имеет набор критических значений $(c_1, ..., c_{2n})$, удовлетворяющий условию: $\min_{i<j} |c_i - c_j| \geq \epsilon$. Тогда пространство $\widetilde{Tg}_n$ содержит $\frac{\epsilon}{2}$-окрестность полинома g относительно L^∞-нормы.

Доказательство. Очевидно.

□

Лемма 4. Пусть циклический набор $\mathcal{C} = (c_1, ..., c_{2n}) \in X_{2n}$ удовлетворяет условиям:

1) $\max |c_i| = \mu$;
2) $\min_i |c_i - c_{i-1}| = \nu > 0$;
3) $\exists g \in \widetilde{Tg}_n$ такое, что $\Psi_n(g) = \mathcal{C}$.

Тогда $\min_i |t_i - t_{i-1}| \geq \frac{\nu}{2n\mu\Gamma_{1,\infty}}$, где $t_1, ..., t_{2n}$ - критические значения g.

Доказательство. По определению имеем

$$\sum_{i=1}^{2n} |c_i - c_{i-1}| = \int_0^{2\pi} |g'(t)| dt.$$

Следовательно, L^1-норма функции g' не превышает $2n\mu$. Согласно наблюдению 1 получаем, что L^∞-норма функции g', т.е. $\max |g'|$ не превышает $2n\mu\Gamma_{1,\infty}$. Из условия 2) имеем, что $\int_{ti-1}^{t_i} |g'| dt \geq \nu$. Таким образом, $\forall i$ выполняется $|t_i - t_{i-1}| \geq \frac{\nu}{2n\mu\Gamma_{1,\infty}}$.

□

Следствие 5. Для любого $g \in \widetilde{Tg}_n$, удовлетворяющего условиям

1) $\min_{i<j} |c_i - c_j| = \epsilon > 0$;
2) $\max_i |c_i| = \mu > 0$,

существует $\delta(\epsilon, \mu)$ такое, что отображение $\Psi_n : \widetilde{Tg}_n / S^1 \to \widetilde{X}_{2n}$ накрывает $\delta(\epsilon, \mu)$-окрестность образа $\Psi_n(g)$ в пространстве $\widetilde{X}_{2n}$ относительно L^∞-нормы.

Доказательство. Согласно лемме 3 для любого g, удовлетворяющего 1)-2), его $\frac{\epsilon}{2}$-окрестность содержится в $\widetilde{Tg}_n$. Кроме того согласно лемме 4 для любого g, удовлетворяющего 1)-2), расстояние $\min_i |t_i - t_{i-1}|$ между его критическими значениями не меньше $\frac{\epsilon}{2n\mu\Gamma_{1,\infty}}$. Следуя доказательству леммы 1, можно для каждого $i = 1, ..., 2n$ построить глобальное гладкое векторное поле ξ_i на $\widetilde{Tg}_n$ из 'векторов' $p^\alpha_{g,i}$. Для этого достаточно для каждого g выбрать $t_{2n+1} = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$, что однозначно определит $p^\alpha_{g,i}$, гладко зависящий от полинома g. Имеем, $\frac{dc_i}{d\xi_i} = 1$, и $\frac{dc_j}{d\xi_i} = 0$, $i \neq j$, где производная берется вдоль поля ξ_i. Легко видеть, что для любого g, удовлетворяющего 1)-2), длины векторов поля ξ_i в $\frac{\epsilon}{4}$-окрестности полинома g ограничены сверху константой, зависящей только от ϵ и μ. Действительно, для любого g^* из $\frac{\epsilon}{4}$-окрестности полинома g выполняются условия: $\max_i |c_i(g^*)| \leq \mu + \frac{\epsilon}{4}$ и $\min_i |c_i(g^*) - c_{i-1}(g^*)| \geq \frac{\epsilon}{2}$. Это позволяет воспользоваться леммой 4 для оценки расстояния между критическими точками g^* и затем леммой 1 для оценки L^1-нормы 'вектора' $p^\alpha_{g^*,i}$. Поскольку векторные поля ξ_i определены для всех i, то можно, двигаясь вдоль них, менять независимо в отделенных от нуля пределах все критические значения c_i. Следовательно, существует $\delta(\epsilon, \mu)$ такое, что отображение Ψ_n накрывает $\delta(\epsilon, \mu)$-окрестность любого полинома g, удовлетворяющего посылкам.

□

Лемма 6 (накрывающая гомотопия для путей в $\widetilde{X}_{2n}$). Рассмотрим произвольный путь $\mathcal{C}(\tau) : [0, 1] \to \widetilde{X}_{2n}$, соединяющий два циклических набора $\mathcal{C}(0) \in \widetilde{X}_{2n}$ и $\mathcal{C}(1) \in \widetilde{X}_{2n}$. Пусть существует тригонометрический полином $g(0) \in \widetilde{Tg}_n$, такой что $\Psi_n(g(0)) = \mathcal{C}(0)$. Тогда найдется путь $g(\tau)$: $[0,1] \to \widetilde{Tg}_n$ (а значит и в $\widetilde{Tg}_n/S^1$), накрывающий $\mathcal{C}(\tau)$.

Доказательство. Анализируя предыдущее доказательство легко убедиться, что выбор $\delta(\epsilon, \mu)$ можно сделать непрерывным по (ϵ, μ). Тем самым, поскольку путь $\mathcal{C}(\tau)$ компактен в $\widetilde{X}_{2n}$, то найдется $\delta_{min} = \min_\tau \delta(\epsilon(\tau), \mu(\tau)) > 0$. Разобъем путь $\mathcal{C}(\mu)$ точками $\mathcal{C}(0), \mathcal{C}(1/N), \mathcal{C}(2/N), ..., \mathcal{C}(1)$ на отрезки длины меньше δ_{min}. Согласно следствию 5 отображение $\Psi_n : \widetilde{Tg}_n/S^1 \to \widetilde{X}_{2n}$ накроет первый отрезок пути. Пусть $g(1/N)$ полином, отображающийся на $\mathcal{C}(1/N)$. Поскольку для $\delta(\epsilon(1/N), \mu(1/N)) > \delta_{min}$, то опять согласно следствию 5 отображение Ψ_n накрывает δ_{min}-окрестность образа $\mathcal{C}(1/n)$ и т.д.

□

Следствие 7. Отображение $\Psi_n : \widetilde{Tg}_n/S^1 \to \widetilde{X}_{2n}$ - накрытие.

Действительно по леммам 1 и 6 это отображение - локальный гомеоморфизм, удовлетворяющий свойству накрывающей гомотопии для путей и, следовательно, накрытие.

□

Доказательство в). Согласно доказанному отображение замкнутых множеств $\Psi_n : \overline{Tg}_n/S^1 \to \overline{X}_{2n}$ корректно определено и является накрытием на открытой части $\widetilde{Tg}_n/S^1 \to \widetilde{X}_{2n}$. Заметим, что из теории аппроксимации Чебышева, в частности, вытекает, что $\sin nx$ - единственный (с точностью до поворотов) тригонометрический многочлен степени не выше n, имеющий $2n$ критических точек и ровно два критических значения ± 1, см. например [5]. Это означает, что класс $\sin nt$ в $\widetilde{Tg}_n$ является единственным прообразом циклического набора $\mathbf{C} = (1, -1, 1, -1, ..., 1, -1) \in X_{2n}$ относительно отображения Ψ_n. Рассмотрим путь $\rho : [0,1] \to X_{2n}$ такой, что $\rho(0) = \mathbf{C}$ и $\rho(\tau) \in \widetilde{X}_{2n}$ для всех $\tau \in (0,1]$. Предположим, что степень накрытия $\Psi_n : \widetilde{Tg}_n/S^1 \to \widetilde{X}_{2n}$ больше 1, и рассмотрим два разных прообраза $\Psi_{n,1}^{-1}(\rho(1))$ и $\Psi_{n,2}^{-1}(\rho(1))$ набора $\rho(1)$. В силу накрывающей гомотопии на открытой части и компактности проективизации пространства $\overline{Tg}_n/S^1$, мы можем однозначно поднять путь ρ до двух путей $\Psi_{n,1}^{-1}(\rho)$ и $\Psi_{n,2}^{-1}(\rho)$ в $\overline{Tg}_n/S^1$. (В действительности, оба эти пути попадут только в Tg_n/S^1, и $\Psi_{n,1}^{-1}(\rho(0))$ совпадает с $\Psi_{n,2}^{-1}(\rho(0))$ и равны $\sin nx$ или, точнее говоря, классу $\sin nx$ в $\widetilde{Tg}_n/S^1$.) Выберем теперь произвольную локальную трансверсаль $\mathfrak{Sec}$ к S^1-действию на $\widetilde{Tg}_n$ в окрестности полинома $\sin nx$. Пути $\Psi_{n,1}^{-1}(\rho)$ и $\Psi_{n,2}^{-1}(\rho)$ однозначно поднимаются в окрестности $\tau = 0$ на трансверсаль $\mathfrak{Sec}$ до путей $\Phi_1(\tau)$ и $\Phi_2(\tau)$, где $\tau \in [0, t << 1]$, причем $\Phi_1(0) = \Phi_2(0) = \sin nx$. С другой стороны, рассмотрим отображение $\widetilde{\mathbf{R}}^{2n} \to \widetilde{X}_{2n}$, где $\widetilde{\mathbf{R}}^{2n} \subset \mathbf{R}^{2n}$ - полный прообраз $\widetilde{X}_{2n}$ в пространстве упорядоченных n-ок чисел $(c_1, ..., c_{2n})$ относительно взятия циклического упорядочивания. (Заметим, что раньше выражение $(c_1, ..., c_{2n})$ обозначало циклически упорядоченный набор.) Для любого $\tau \in (0,1]$ выберем в циклически упорядоченном наборе $\rho(\tau)$ полное упорядочивание, положив его первый элемент равный минимуму из всех. Поскольку $\rho(\tau)$ лежит в $\widetilde{X}_{2n}$, этот выбор определен однозначно. После этого выбора путь ρ однозначно поднимется до пути $\widetilde{\rho} \subset \widetilde{\mathbf{R}}^{2n}$. Локально определенное отображение $\widetilde{\Psi}_n : \mathfrak{Sec} \to \widetilde{\mathbf{R}}^{2n}$, отображающее полином на упорядоченный набор его критических значений, переводит Φ_1 и Φ_2 в $\widetilde{\rho}$. Однако, в силу замечания 0 отображение $\widetilde{\Psi}_n$ отображает трансверсаль $\mathfrak{Sec}$ локально гомеоморфно на окрестность набора $\mathbf{C}$ в $\widetilde{\mathbf{R}}^{2n}$. Следовательно, $\Phi_1 = \Phi_2$. Тем самым, $\Psi_{n,1}^{-1}(\rho)$ и $\Psi_{n,2}^{-1}(\rho)$ совпадают в окрестности нуля, а значит, и глобально. Это противоречит посылке и доказывает лемму.

$\square$

[1] В. И. Арнольд. Топологические проблемы в теории распространения волн, – УМН, 1996,1,с.1-49.

[2] V. I. Arnold Bernoulli-Euler updown numbers associated with functions singularities, their combinatorics and arithmetics, - Duke Math. J., 1991, vol. 63, 2, pp. 537-555.

[3] V. I. Arnold Topological classification of real trigonometric polynomials and cyclic serpents polyhedron, - Arnold-Gelfand Math. Sem., Birkhäuser, 1997, pp. 101-106.

[4] W. A. Coppel Disconjugacy, LNM, vol. 220, 1971, Springer-Verlag.

[5] T. J. Rivlin Chebyshev polynomials, second edition, J.Wiley & Sons, 1990.

Факультет математики
Стокгольмский университет
Стокгольм, Швеция