Mer om trianglar med given omkrets och area

Jan Boman

Matematiska Institutionen
Stockholms Universitet
jabo@math.su.se

I Normat nr 2, 2007 studerar Bengt Ulin mängden av trianglar med given omkrets och area. Det är intuitivt ganska uppenbart att denna mängd är en kontinerlig skara — utom i undantagsfallet liksidig triangel — vilket Ulin också påpekar i inledningen till sin artikel. Den geometriska metod som Ulin använder ger dock blott ett svagare resultat. Här ska visas att, utom i det nyssnämnda undantagsfallet, mängden i fråga alltid utgör en sammanhängande sluten ”kurva” i mängden av alla trianglar.

En pA-triangel, det vill säga en triangel med area A och omkrets $2p$, ges av en trippel a, b, c för vilken

$$A^2 = p(p-a)(p-b)(p-c), \qquad \text{och} \qquad 2p = a+b+c.$$

För att studera mängden av pA-trianglar kan vi välja att betrakta p som given och betrakta A^2 som funktion av (a, b, c). Vi inser lätt att punkten $a = b = c = 2p/3$ är speciell. Det är därför naturligt att göra en translation av koordinater så att denna punkt svarar mot origo, nämligen att införa $x = a - 2p/3$, $y = b - 2p/3$, $z = c - 2p/3$. Detta leder till funktionen

$$G(x,y,z) = A^2/p = (\frac{p}{3} - x)(\frac{p}{3} - y)(\frac{p}{3} - z) = (q-x)(q-y)(q-z), \qquad (1)$$

där jag har satt $p/3 = q$. Jag vill studera lösningarna till

$$G(x,y,z) = c, \qquad x+y+z = 0$$

för givet q och c. Om vi utvecklar (1) och använder att $x+y+z=0$ så får vi

$$G(x,y,z) = q^3 + (xy+yz+zx)q - xyz.$$

Eftersom q är given kan vi lika gärna studera ekvationen $F(x,y,z) = c$ där

$$F(x,y,z) = G(x,y,z) - q^3 = (xy+yz+zx)q - xyz.$$

Vidare kan vi göra oss av med q med hjälp av homogenitetstransformationen $(x,y,z) \mapsto (qx, qy, qz)$, vilket leder till specialfallet då $q = 1$. Eller, vilket är ekvivalent, vi kan observera att det räcker att studera det ursprungliga problemet för

ett speciellt värde på p, till exempel $p = 3$, vilket svarar mot $q = 1$. Detta leder till funktionen
$$F(x, y, z) = xy + yz + zx - xyz.$$

Punkten $F(0, 0, 0) = 0$ motsvarar liksidig triangel. Eftersom vi vet att den liksidiga triangeln har den största möjliga arean för given omkrets väntar vi oss att funktionen F ska anta negativa värden för $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ och $x + y + z = 0$. Så är i själva verket fallet, åtminstone för små (x, y, z), ty restriktionen till planet $x + y + z = 0$ av den kvadratiska formen $Q(x, y, z) = xy + yz + zx$ är negativt definit. Ett sätt att inse detta är att skriva $Q(X) = \frac{1}{2}\langle BX, X\rangle$ där $X = (x, y, z)$ och B är den symmetriska matrisen
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Denna matris har egenvärdet 2 med egenvektorn $(1, 1, 1)$, och egenvärdet -1 på det 2-dimensionella egenrummet som är ortogonalt mot $(1, 1, 1)$, ty om $x + y + z = 0$, så gäller
$$B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + z \\ z + x \\ x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}.$$

Det följer att funktionen $F(x, y, z)$ inskränkt till planet $x+y+z = 0$ har ett strikt, lokalt maximum i punkten $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Härav följer i sin tur att åtminstone för små $c < 0$ finns en sluten kurva i planet $x+y+z = 0$ som består av lösningar till ekvationen $F(x, y, z) = c$. Därmed är visat att en triangel som inte avviker särskilt mycket från liksidighet måste ha en oändlig, en-parametrig skara av pA-tvillingar, det vill säga icke-kongruenta trianglar med samma värde på p och A.

För att visa en starkare utsaga måste vi studera lösningarna till $F(x, y, z) = c$ för godtyckliga c i intervallet $-1 < c < 0$. Ty med $p = 3$, det vill säga $q = p/3 = 1$, kan ekvationen (1) skrivas
$$A^2/3 = (1 - x)(1 - y)(1 - z) = 1 + xy + yz + zx - xyz = 1 + F(x, y, z),$$
varför $A = 0$ svarar mot $F(x, y, z) = -1$.

Beteckna funktionen F inskränkt till $x+y+z = 0$ med F_0. Vi är intresserade av kritiska punkter till funktionen F_0, det vill säga nollställen till gradienten för F_0. Gradienten för F_0, $\operatorname{grad} F_0$, måste vara lika med projektionen av $\operatorname{grad} F$ på planet $x+y+z = 0$. Nollställena till $\operatorname{grad} F_0$ måste alltså vara de punkter för vilka $\operatorname{grad} F$ är parallell med normalen till planet $x + y + z = 0$, det vill säga är parallell med $(1, 1, 1)$. Detta villkor kan skrivas, $\partial F/\partial x = \partial F/\partial y$, $\partial F/\partial x = \partial F/\partial z$, vilket efter en lätt räkning ger
$$(y - x)(z - 1) = 0, \qquad (z - x)(y - 1) = 0. \tag{2}$$

Tillsammans med ekvationen $x + y + z = 0$ ger detta de tre lösningarna
$$(1, 1, -2), \quad (1, -2, 1), \quad (-2, 1, 1) \tag{3}$$

och inga andra. I dessa punkter har F_0 värdet $F(1, 1, -2) = -1$. Detta innebär att de enda kritiska värdena till F_0 (det vill säga funktionsvärden i kritiska punkter) är 0 (som svarar mot liksidig triangel) och -1 (som svarar mot urartad triangel med area lika med noll). Med andra ord, om (x, y, z) är en punkt i vilken $-1 < F_0(x, y, z) < 0$, så måste gradienten för F_0 vara skild från noll i punkten (x, y, z).

Härav kan vi nu dra följande viktiga slutsats: om $-1 < c < 0$ så är lösningsmängden till $F_0(x, y, z) = c$ en ”snäll” (det vill säga deriverbar, ja till och med oändligt deriverbar) kurva. (Välj koordinater i planet $x + y + z = 0$ och använd ”implicita funktionssatsen”!) Det betyder exempelvis att lösningsmängden inte kan innehålla en isolerad punkt, en punkt där två kurvor korsar varandra, eller en ”hörn”-punkt på en kurva. Eftersom detta argument endast handlar om lösningsmängdens utseende ”lokalt”, så utesluter det dock inte att lösningsmängden kunde bestå av två eller flera disjunkta kurvor. Vad som återstår är just att visa att detta inte kan inträffa.

De möjliga värdena på a, b, c, som ju beskrivs av triangelolikheten $a \leq b + c$ och två analoga olikheter, motsvaras av $x \leq y+z+2$, $y \leq x+z+2$, $z \leq x+y+2$. Dessa tre olikheter definierar ett triangelformat delområde av planet $x+y+z = 0$, som jag kallar T. Randen av T svarar mot urartad triangel med area noll, vilket som sagt innebär att $F_0 = -1$ där. De nyssnämnda kritiska punkterna är hörnpunkterna av triangeln T. Detta innebär att funktionen F_0 saknar andra kritiska punkter än origo i det inre av T.

Sats. För varje c i intervallet $-1 < c < 0$ gäller att lösningsmängden till ekvationen $F_0(x, y, z) = c$ i området T utgörs av en enda enkel sluten kurva i planet $x+y+z = 0$.

Bevis. Antag motsatsen, det vill säga att lösningsmängden till $F_0 = c$ i T innehåller minst två disjunkta slutna kurvor, γ_1 och γ_2. Låt D_1 vara det begränsade delområde av planet $x + y + z = 0$ som har γ_1 till rand. Eftersom $\gamma_1 \subset T$ så är det klart att $D_1 \subset T$. Eftersom F_0 är konstant på γ_1 så måste F_0 ha en extrempunkt i D_1. Men denna punkt måste vara en kritisk punkt, och vi har sett att den enda kritiska punkten i det inre av T är origo. Alltså måste origo tillhöra D_1, det vill säga γ_1 löper ett varv runt origo. Samma resonemang tillämpat på γ_2 visar att även γ_2 måste löpa ett varv runt origo. Men det betyder att kurvorna γ_1 och γ_2 tillsammans avgränsar ett ringformat delområde av T, som inte innehåller origo. Eftersom F_0 är konstant på detta områdes rand, så måste F_0 ha en extrempunkt i detta område. Men detta är också omöjligt, eftersom origo var den enda kritiska punkten i det inre av T. Därmed har vi fått en motsägelse, varmed satsen är bevisad.

Ovan har underförståtts att kongruenta trianglar betraktas som samma trianglar. Det betyder att två taltripplar (a, b, c) som är förbundna med en cyklisk permutation, till exempel (a, b, c) och (b, c, a), svarar mot samma triangel. (Däremot svarar (a, b, c) och (b, a, c) mot trianglar som är varandras spegelbilder, men i allmänhet inte är kongruenta.) Den avbildning som associerar en taltrippel (a, b, c) till en triangel med sidorna a, b, c är därför inte en-entydig. Genom ett ögonblicks eftertanke ser vi lätt att varje triangel som inte är liksidig har precis tre taltripplar som urbild under denna avbildning. Detsamma gäller förstås om vi ersätter tripplarna (a, b, c) med tripplarna (x, y, z). Detta innebär att medan punkten (x, y, z) genomlöper en av de slutna kurvorna i satsen ovan, så genomlöper motsvarande triangel en sluten kurva i mängden av trianglar exakt tre gånger. Därmed har vi visat följande korollarium.

Korollarium. Låt Q vara en godtycklig triangel som inte är liksidig. Mängden av trianglar som har samma omkrets och area som Q utgör en kompakt, sammanhängande, en-parametrig skara, närmare bestämt en enkel, sluten kurva i mängden av trianglar.

Om $A = p^2/\sqrt{27}$ är triangeln liksidig. Om $A < p^2/\sqrt{27}$, så finns två likbenta trianglar med area A och omkrets $2p$, en med de två längsta sidorna lika och en med de två kortaste sidorna lika (jfr Sats 2 i Ulins artikel). Om vi även skulle identifiera trianglar som är varandras spegelbilder, så skulle skaran av pA-trianglar inte längre vara en sluten kurva utan i stället ett ändligt kurvstycke, vars ändpunkter är de två nyssnämnda likbenta trianglarna.