

Matematik som poesi

Jan Boman

”Fast är proportionen
mellan magnetfältets tidsderivata
och det elektriska fältets rotation
Fast är proportionen
mellan tidsderivatan av den elektriska fältet
och det magnetiska fältets rotation ... ”

deklamerar Apollon i Willy Kyrklunds pjäs ”Gudar och människor”. Mer precis, men — kanske — mindre välklingande hade han kunnat säga

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\operatorname{rot} E \quad \text{och} \quad \frac{\partial E}{\partial t} = \operatorname{rot} B.$$

Matematikens roll i Kyrklunds pjäs är motsägelsefylld: vi möter den både som skön poesi och som redskap för att frambringa dödsbringande vapen.

Vi som sysslar med matematik menar — i likhet med Kyrklunds gudar — för det första att matematisk kunskap har ett stort egenvärde, för det andra att den är ett effektivt hjälpmedel för att förstå sådant som är intressant att förstå, exempelvis om den värld som vi lever i. En illustration av det påståendet är Newtons förklaring av planetbanorna med hjälp av differentialkalkylen.

Man visste ju genom Kepler att planeterna rörde sig i ellipsformade banor med solen i ena brännpunkten, men man hade ingen idé om vad det var för kraft som åstadkom denna rörelse. Newton fick ingivelsen att det kunde vara samma kraft som fick äpplet att falla till marken. Det är ju därför som det finns ett stort äpple i taket vid Tekniska Högskolans tunnelbanestation; har ni sett det? Newton formulerade sin allmänna gravitationslag i matematiska termer, och med hjälp av sin differentialkalkyl kunde han bevisa att de elliptiska planetbanorna var en konsekvens av gravitationslagen. Med hjälp av matematiken hade fysiken därmed nått ut till stjärnorna, en domän som ju dittills hade varit strängt reserverad för Gud.

Som andra exempel vill jag ta Maxwells ekvationer, de ekvationer som reciterades av Apollon. Sedan urminnes tider har människan undrat vad ljus är. Att utbredningshastigheten inte var oändlig, d.v.s. att ljuset tog tid på sig för att färdas från en punkt till en annan, förstod man först på 1600-talet; den danske astronomen Ole Römer observerade då att förmörkelsen av Jupiters månar ägde rum några minuter senare då Jupiter befann sig långt från jorden än då Jupiter befann sig nära jorden, och han gav den rätta tolkningen av fenomenet. Men vad det var som färdades genom rummet visste man fortfarande inte. Newton trodde att det var partiklar, andra

trodde att det var något slags vågor, men vad var det i så fall som böljade, vibrerade?

Under början av 1800-talet kunde man alstra svaga elektriska strömmar med hjälp av ett slags batterier, galvaniska element. Man upptäckte då att den elektriska strömmen påverkade magneter, t.ex. kompassnålar. Vi säger nu att det bildas ett elektriskt fält runt tråden. Några decennier senare upptäckte man också ett samband i motsatt riktning: om man rör på en magnet nära en metalltråd, så uppstår en elektrisk ström i tråden. Många fysiker studerade dessa fenomen omsorgsfullt för att beskriva dem noga, även kvantitativt, exempelvis vilken storlek och riktning magnetfältet har på olika avstånd från strömtråden och vid olika strömstyrka. En avgörande insats gjordes här av Michael Faraday. *Emellertid, för att koncist sammanfatta resultatet av alla dessa mätningar krävdes sofistikerad matematik* (som inte var uppfunnen på Faradays tid). På 1860-talet lyckades den skotske fysikern James Clark Maxwell finna de rätta formuleringarna, nämligen de ekvationer som Apollon reciterade och ytterligare några ekvationer. (Dessa ekvationer sammanfattar alltså resultatet av tusentals mätningar!)

Nu kommer det fantastiska! När dessa ekvationer väl är uppskrivna behöver man bara göra en enkel kalkyl utgående från ekvationerna för att se att det måste finnas en vågrörelse hos det elektromagnetiska fältet och att dennas utbredningshastighet kan uttryckas som produkten av två fysikaliska storheter som Faraday hade mätt med sina spolar och magneter. Och detta värde på ljushastigheten stämde med det som Römer hade funnit vid sina observationer av Jupiters månar! Närmare bestämt, det elektriska och det magnetiska fältet måste satisfiera en differentialekvation, den så kallade vågekvationen,

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}.$$

Konstanten c är ljushastigheten. Eller som Apollon uttrycker det

Och summan av andraderivatorna av rumskoordinaterna
är lika
med andra derivatan av tidskoordinaten dividerad
med ljusets hastighet i kvadrat .

Denna differentialekvation var tidigare känd; man hade t.ex. använt den — med ett annat värde c — för att förstå den fysikaliska mekanismen bakom ljudvågor i luft.

Slutsatsen av det hela är alltså att ljuset är i princip samma fenomen som de som Faraday observerar när han sitter och leker med sina spolar och magneter i laboratoriet. Men det behövs matematik för att se detta. Matematiken fungerar här för intellektet som teleskopet för ögat: den utsträcker intellektets räckvidd.

På detta sätt kan vi också se likheten mellan matematik och annan god poesi: den sublimes språkliga förtätningen.