TD10 : Homologies singulière et cellulaire

Applications du cours ⋆	*à préparer en l'avance et corriger en début de séance*
Pour s'entrainer et approfondir ⋆⋆	*à traiter pendant la séance*
Pour aller plus loin ⋆⋆⋆	*facultatifs*

Exercice 1. Calculs d'homologie ⋆

1. Bouquet d'espaces. Soient (X, x_0) et (Y, y_0) deux espaces topologiques correctement pointés. Calculer $H_n(X \vee Y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ en fonction des groupes d'homologie de X et de Y.
2. Suspension. Soit X un espace topologique. On rappelle que son cone CX est l'espace quotient $X \times I/X \times \{1\}$, et la suspension SX de X est l'espace quotient $CX/(X \times \{0\})$. Calculer l'homologie de SX en fonction de l'homologie de X.
3. Tore et bouquets de sphères Montrer que le tore $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ a les mêmes groupes d'homologie singulière que le bouquet $B = \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ mais que ces deux espaces ne sont pas homotopiquement équivalents.
4. La bouteille de Klein Calculer les groupes d'homologie de la bouteille de Klein.
5. L'espace privé d'un cercle Calculer l'homologie du complémentaire d'un cercle dans $\mathbb{R}^3$.
6. Parachute. Calculer l'homologie du « parachute » obtenu en recollant les trois sommets de Δ^2.

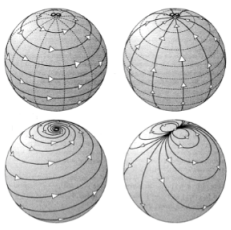


Exercice 2. Degré d'une application ⋆

Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue. On définit le degré de f est comme le nombre entier $\deg(f)$ tel que, pour tout $z \in H_n(\mathbb{S}^n; \mathbb{Z})$, on ait $f_*(z) = \deg(f)z$.

1. Soit $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ une application continue sans point fixe. Montrer que $\deg f = (-1)^{n+1}$.
   Indice. On pourra montrer que toute application continue, sans point fixe est homotope à l'application antipodie.
2. Montrer que pour toute application continue, $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$, sans point fixe, il existe $x_0 \in \mathbb{S}^n$ tel que $f(x_0) = -x_0$. En déduire qu'il n'existe pas d'application continue, $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$, telle que x est orthogonal à $f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{S}^{2n}$.
3. Soit G un groupe non-trivial agissant librement sur $\mathbb{S}^{2n}$ par homéomorphismes. Montrer que $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. Champs de vecteurs.
   (a) On suppose n impair. Montrer qu'il existe sur $\mathbb{S}^n$ un champ de vecteurs tangents continu ne s'annulant pas.
   (b) Montrer le théorème de la « boule chevelue » : tout champ de vecteurs tangents continu sur $\mathbb{S}^n$ avec n pair s'annule en au moins un point.

Remarque. On note $\rho(n)$ le nombre maximum de champs de vecteurs tangents à la sphère $\mathbb{S}^n$ linéairement indépendants en chaque point. D'après un théorème de Hurewitz, Radon, Eckman et Adams, ce nombre peut être déterminé de façon explicite : si l'on décompose l'entier n en $n = (2a+1)2^b$ avec $b = c + 4d$ et $0 \leq c \leq 3$, on montre que $\rho(n) + 1 = 2^c + 8d$.



Exercice 3. Espaces de Moore ⋆

Étant donnés un groupe abélien G et un entier $n \geq 1$, on appelle *espace de Moore* pour (G, n) un CW-complexe X tel que $H_n^{cw}(X, \mathbb{Z}) \simeq G$ et $\tilde{H}_i^{cw}(X) = 0$ pour $i \neq n$.

1. Construire un espace de Moore pour $G = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ et n quelconque.
2. Construire un espace de Moore pour G abélien de type fini et n quelconque.
3. Construire un espace de Moore pour G et n quelconques.
4. Soient $(G_i)_{i\geq 1}$ des groupes abéliens. Construire un espace topologique connexe par arcs X tel que $H_i^{cw}(X, \mathbb{Z}) = G_i$ pour tout $i \geq 1$.

Exercice 4. Caractéristique d'Euler ⋆⋆

Soit X un CW-complexe fini. Pour tout $k \geq 0$, on note c_k le nombre de k-cellules de X. La *caractéristique d'Euler* de X est l'entier $\chi(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i c_i$.

1. Soit $\mathbb{K}$ un corps. Montrer que $\chi(X)$ peut également être calculée par la formule
$$\chi(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_F H_i^{cw}(X; \mathbb{K}).$$
2. Calculer la caractéristique d'Euler des surfaces S_g et S'_g pour tout $g \geq 0$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les entiers g et h pour qu'il existe un revêtement de S_g par S_h.
4. On suppose que le CW-complexe fini X s'écrit comme l'union de deux sous-complexes A et B. Montrer que
$$\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B).$$
5. Soient X et Y des CW-complexes finis. Expliquer comment $X \times Y$ peut être muni d'une structure de CW-complexe fini, et montrer que $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Exercice 5. Homologie cellulaire et produit ⋆⋆⋆

Soient X et Y deux CW-complexes. On suppose que X ou Y est localement fini (par exemple que l'un des deux est compact).

1. Construire une structure de CW-complexe sur le produit $X \times Y$.
2. Montrer que l'on a un isomorphisme naturel au niveau des complexes de chaînes cellulaires
$$C_\bullet^{cw}(X \times Y) \cong C_\bullet^{cw}(X) \otimes C_\bullet^{cw}(Y)$$
3. Calculer l'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ pour $m, n \geq 1$.

Exercice 6. Points antipodaux ⋆⋆⋆

Calculer l'homologie cellulaire des espaces suivants :

1. Le quotient de $\mathbb{S}^2$ obtenu en identifiant les points antipodaux de son équateur.
2. Le quotient de $\mathbb{S}^3$ obtenu en identifiant les points antipodaux de son équateur $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$.

