Corrigé du TD9 : Homologie singulière I

Exercice 1. Premiers calculs d'homologie ⋆

1. On suppose que $X = \{x\}$ est un point. Par définition, on a pour tout $n \geq 0$,

$$C_n(X,R) := \bigoplus_{z:\Delta^n \to X} R = \{\sum_j a_j z_j \mid a_j \in R, z_j : \Delta^n \to X\}$$

$$\partial_n : C_n(X;R) \to C_{n-1}(X;R), \quad \sum_j a_j z_j \mapsto \sum_j a_j \sum_{i=0}^{n} (-1)^i z_j \circ \phi_i$$

où $\phi_i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n$ est définie pour tout i par $(t_0, \dots, t_{n-1}) \mapsto (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{n-1})$. Dans le cas où $X = \{x\}$, pour tout n, on a une unique application constante en x, $z_n : \Delta^n \to X$ et $C_n(X,R) = R[z_n]$. La différentielle est donnée par

$$\partial_n(z_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i z_n \circ \phi_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i z_{n-1} = \begin{cases} z_{n-1} & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi $\partial_n = 0$ si n est impaire et $\partial_n : z_n \mapsto z_{n-1}$ est un isomorphisme si n est pair. On obtient un complexe de chaînes de la forme

$$R[z_0] \xleftarrow{0} R[z_1] \xleftarrow{\simeq} R[z_2] \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{0} R[z_{n-1}] \xleftarrow{\simeq} R[z_n] \xleftarrow{0} \dots$$

On obtient alors pour l'homologie associée

$$H_n(X;R) = \begin{cases} R[z_0]/\text{Im } \partial_1 \simeq R & \text{si } n = 0 \\ \text{Ker } \partial_n \simeq 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ R/R \simeq 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Ainsi $H_n(X;R) = 0$ si $n \geq 1$ et $H_0(X,R) \simeq R$.

2. On fixe un point $x_s \in S$ pour tout composante connexe par arcs $S \in \pi_0(X)$. Pour tout $S \in \pi_0(X)$, on obtient une application $z_s : \Delta^0 \to X$ dans $C_0(X;R)$ qui envoie le point de Δ^0 sur x_s. On en déduit un morphisme

$$\phi : \bigoplus_{s \in \pi_0(X)} R \longrightarrow C_0(X;R) \ .$$

On vérifie que la composée $\overline{\phi} : \bigoplus_{s\in\pi_0(X)} R \longrightarrow C_0(X;R) \longrightarrow C_0(X;R)/\text{Im } \partial_1 = H_0(X;R)$ est un isomorphisme.

- *Surjectivité.* Soit $z : \Delta^0 \to X$ une application de $C_0(X;R)$ dont on note x le point image. Ce point est dans une certaine composante connexe par arcs de X donc il existe un unique $S \in \pi_0(X)$ tel que $x \in S$ et on peut trouver un chemin γ reliant x à x_0.

  On peut voir ce chemin comme une application continue $\gamma : \Delta^1 \to X$ telle que $\gamma(1,0) = x$ et $\gamma(0,1) = x_s$. On a $\partial_1 \gamma = x_s - x$. Ainsi $[z] = [z_s]$ dans $H_0(X;R)$, et z est dans l'image de ϕ. On montre de même que la classe d'homologie représentée par une somme $\sum_i a_i x_i$ est homologue à une classe dans l'image de ϕ. On a donc la surjectivité de ϕ.
- *Injectivité.* On construit un morphisme $\psi : C_0(X;R) \to \bigoplus_{s\in\pi_0(X)} R$ tel que $\psi \circ \overline{\phi} = \text{id}$. En identifiant une application $\Delta^0 \to X$ avec son image dans X, on obtient que $C_0(X;R) = \oplus_X R = R[X]$. On est donc ramenés à définir ψ sur les points de X. Soit $x \in X$ alors $\psi(x)$ est le vecteur de $\bigoplus_{s\in\pi_0(X)} R$ dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle qui correspond à la composante connexe S de x qui vaut 1. On a bien $\psi \circ \phi = \text{id}$.

  De plus, soit $y = \sum_i a_i \gamma_i$ dans $C_1(X;R)$. On a $\partial_1 y = \sum_i a_i(\gamma_i(0,1) - \gamma_i(1,0))$. Alors on a $\psi(\partial_1 y) = 0$ puisque pour tout i, les éléments $\gamma_i(0,1)$ et $\gamma_i(1,0)$ sont dans la même composante connexe. Cela montre que ψ se factorise à travers $H_0(X;R)$.

3. Il s'agit de généraliser la preuve de la question précédente à n'importe quel degré. Soit $n \geq 0$ un entier. On considère $z : \Delta^n \to X$ un n-simplexe, i.e. un élément de $C_n(X;R)$ d'image incluse dans X_i. Alors toutes ses faces $z \circ \phi_i$ sont dans X_i. Si $z \in Z_n(X;R)$ est un cycle, il s'écrit donc de manière unique comme $z = \sum_i z_i$ avec $z_i \in Z_n(X_i;R)$. On a ainsi un morphisme $\phi : Z_n(X;R) \to \oplus_{i\in I} H_n(X_i;R)$ donné par $\phi(z) = \sum_i [z_i]$.
   Soit z tel que $z = \partial_{n+1} z'$ est un bord. On décompose z' comme $z' = \sum_i z'_i$ avec $z'_i \in C_{n+1}(X_i;R)$. On obtient $\partial_{n+1} z'_i = z_i$. Ainsi $\phi(z) = \sum_i [\partial_{n+1} z'_i] = 0$. Ainsi ϕ s'annule sur $B_n(X;R)$ et passe au quotient en un morphisme
   $$\varphi : H_n(X;R) \to \oplus_{i\in I} H_n(X_i;R) \ .$$
   Ce morphisme est surjectif car $\sum_i [z_i] = \varphi([\sum_i z_i])$. Il est aussi injectif avec si $\varphi([z]) = 0$, alors $z_i = \partial_{n+1} z'_i$ pour tout i et $z = \partial_{n+1} \sum z'_i$.

Exercice 2. Homologie d'une paire ⋆

1. On peut supposer que X est un espace connexe par arcs quitte à raisonner sur chacune des composantes et utiliser l'exercice précédent. On est ramenés à montrer que $H_0(X,A) = 0$ si et seulement si $A \neq \varnothing$. On considère la fin de la suite exacte longue de groupe d'homologie
   $$H_1(X,A) \longrightarrow H_0(A) \xrightarrow{i} H_0(X) \xrightarrow{\pi} H_0(X,A) \to 0$$
   On a que $H_0(X,A) = H_0(X)/\text{Ker}\ \pi$. Comme la suite est exacte, $\text{Ker}\ \pi = \text{Im}\ i$. On peut supposer que $X \neq \varnothing$ sinon le résultat est trivial.
   - Si $A = \varnothing$ alors $H_0(X,A) \cong H_0(X) \neq 0$.
   - Sinon, A admet au moins un point $a \in A$ et $H_0(A) = \bigoplus_{s\in\pi_0(A)} R$. Dans ce cas, en choisissant un point x de X et l'application constante $z_x : \Delta^0 \to X$ égale à x, on obtient $H_0(X) \cong R[z_x]$. Comme X est connexe par arcs, il existe un chemin entre x et a de sorte que $[z_x] = [z_a]$. Ainsi, $[z_a]$ est envoyé par i sur le générateur $[z_x] \in H_0(X)$ et i est surjective. Ainsi $\text{Im}\ i = H_0(X)$ et $H_0(X,A) = 0$.

   Donc $H_0(X,A) = 0$ si, et seulement si $A \neq \emptyset$.

2. On peut à nouveau supposer que X est connexe par arcs et on raisonne sur la suite exacte longue de la paire (X,A). On considère la suite exacte
   $$H_1(A) \xrightarrow{i_0} H_1(X) \longrightarrow H_1(X,A) \longrightarrow H_0(A) \xrightarrow{i_0} H_0(X) \ .$$
   Elle montre que le groupe $H_1(X,A)$ est nul, si et seulement si $i_0 : H_1(A) \to H_1(X)$ est surjective et $i_1 : H_0(A) \to H_0(X)$ est injective. Or l'injectivité de cette dernière équivaut au fait que A est connexe par arcs. En effet, comme à la question précédente, $H_0(A) = \bigoplus_{s\in\pi_0(A)} R$ se surjecte sur $H_0(X) \cong R[z_x]$. Il s'agit d'une injection si et seulement si $|\pi_0(A)| = 1$.

3. Le suite exacte longue de la paire (X,A) montre les groupes $H_n(X,A)$ et $H_n(X)$ sont isomorphes en degré strictement positif, et pour $n = 0$, il s'identifie au quotient $H_0(X)/\mathbb{Z}[x_A]$ où $A = \{x_A\}$.
4. En raisonnant sur la suite exacte longue d'homologie de la paire (X,A), l'équivalence est immédiate.
5. Il existe $r : X \to A$ tel que $r \circ i = id_A$. En regardant les applications induites en homologie, on obtient $H(r) \circ H(i) = id_{H_*(A)}$ et ainsi $H(i)$ est injective.

Exercice 3. Le théorème d'écrasement et bonnes paires ⋆

1. **Théorème :** Si A et U sont deux parties d'un expace topologique X, vérifiant $\bar{U} \subset \text{Int}\ A$, l'injection $(X\backslash U, A\backslash U) \hookrightarrow (X,A)$ induit un isomorphisme en homologie, $H_*(X\backslash U, A\backslash U; R) \cong H_*(X,A;R)$.

   Soit (X,A) une bonne paire. Alors A est fermé non vide et il existe un voisinage ouvert V de A qui se rétracte par déformation forte sur A. En d'autres termes, il existe $r : V \to A$ tel que si on note $i : A \to V$ l'inclusion, on a $r \circ i = \text{id}_A$ et il existe une homotopie $H : V \times I \to V$ entre $i \circ r$ et id_V telle que $H(a,t) = a$ pour tout $(a,t) \in A \times I$.

Le triplet $A \subset V \subset X$ vérifie les hypothèses du théorème d'excision. On en déduit que l'inclusion $(X\backslash A, V\backslash A) \hookrightarrow (X, V)$ induit un isomorphisme en homologie $H_*(X\backslash A, V\backslash A; R) \cong H_*(X, V; R)$ De plus, l'inclusion de la paire (X, A) dans (X, V) est une équivalence d'homotopie. Comme la rétraction par déformation est forte, elle induit une équivalence d'homotopie $X/A \to V/A$. On obtient donc le diagramme commutatif suivant dont les flèches horizontales sont des quasi-isomorphismes :

$$\begin{array}{ccccc} C_\bullet(X, A) & \xrightarrow{\sim} & C_\bullet(X, V) & \xleftarrow[\phi_2]{\sim} & C_\bullet(X \setminus A, V \setminus A) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_1} & & & & \downarrow{\scriptstyle \phi_3} \\ C_\bullet(X/A, A/A) & \xrightarrow{\sim} & C_\bullet(X/A, V/A) & \xleftarrow{\sim} & C_\bullet(X/A \setminus A/A, V/A \setminus A/A) \end{array}$$

On veut montrer que ϕ_1 est un quasi-isomorphisme (induit un isomorphisme en homologie). Le théorème d'excision implique que ϕ_2 est un quasi-isomorphisme. De plus, l'application $X\backslash A \to (X/A\backslash A/A)$ est un homéomorphisme et donc induit un quasi-isomorphisme ϕ_3 au niveau des complexes de chaînes.

2. Soit X un CW-complexe et $A \subset X$ un sous-complexe. On veut construire un voisinage A qui se rétracte par déformation sur A.

   On raisonne par récurrence sur $n \geq 0$ et l'intersection $A \cap X_n$. On fixe $0 < \epsilon < 1$. Pour $n = 0$, on pose $N^0_\epsilon(A) = A \cap X_0$. Supposons que l'on ait construit un voisinage $N^n_\epsilon(A)$ de $A \cap X_n$ dans X_n. On veut définir un voisinage de $A \cap X_{n+1}$ dans X_{n+1}. On écrit X_{n+1} comme le recollement de cellules à partir de X_n,

   $$X_{n+1} = \bigcup_{i \in I} \mathbb{D}^{n+1}_i \cup_{f_i} X_n \ .$$

   Pour tout $i \in I_{n+1}$, on note $\phi^{n+1}_i : \mathbb{D}^{n+1}_i \to X_{n+1}$ l'application caractéristique qui correspond à l'inclusion et au passage au quotient.

   Soit $i \in I_{n+1}$. Considérons le sous-espace $\tilde{A}_i := (\phi^{n+1}_i)^{-1}(A \cap X_{n+1})\backslash\mathbb{S}^n$ dans $\mathbb{D}^{n+1}\backslash\mathbb{S}^n$. On construit un ϵ-voisinage ouvert de $\tilde{A}_i$ dans $\mathbb{D}^{n+1}\backslash\mathbb{S}^n$ de la façon suivante. Pour tout $x \in \tilde{A}_i$, on note

   $$W_x = \{y \in \mathbb{D}^{n+1}\backslash\mathbb{S}^n \mid \|y - x\|_2 < \epsilon\} \ .$$

   Alors $W_i = \bigcup_{x \in \tilde{A}} W_x$ est un voisinage de $\tilde{A}$ voulu.

   Par hypothèse, il existe un voisinage de $N^n_\epsilon(A)$ de $A \cap X_n$ dans X_n. Considérons $(\phi^{n+1}_i)^{-1}(N^n_\epsilon(A)) \subset \mathbb{S}^n_i$. On a un homéomorphisme

   $$r : (0, 1] \times \mathbb{S}^n \to \mathbb{D}^{n+1}, \quad (r, \theta) \mapsto r\theta \ .$$

   On note V_i l'image de $(1 - \epsilon, 1] \times \phi_i^{-1}(N^n_\epsilon(A))$ par r et on considère $U_i = V_i \cup W_i$. Définissons

   $$N^{n+1}_\epsilon(A) := \bigcup_{i \in I_{n+1}} \phi^{n+1}_i(U_i) \ .$$

   On définit enfin $N_\epsilon(A) = \cup_n N^n_\epsilon(A)$. Il s'agit d'un ouvert de X comme son image inverse par chaque application caractéristique est ouverte.

   On construit à présent une rétraction par déformation de $N_\epsilon(A)$ sur A. On considère une cellule e^m_i dans $X\backslash A$ caractérisée par $\phi^m_i : \mathbb{D}^m_i \to X_m$. On s'intéresse à $e^m_i \cap N_\epsilon(A)$. Par construction, $(\phi^m_i)^{-1}(N_\epsilon(A)) = (\phi^m_i)^{-1}(V_i)$. Hors, comme $r < 1$, l'espace

   $$(1 - \epsilon, 1] \times \phi_i^{-1}(N^{m-1}_\epsilon(A))$$

   se rétracte par déformation sur $\phi_i^{-1}(N^{m-1}_\epsilon(A)) \subset \mathbb{S}^{m-1}$. On a donc une rétraction de $e^m_i \cap N_\epsilon(A)$ sur $e^m_i \cap N^{m-1}_\epsilon(A)$ que l'on note r^m_i.

   On note J_m l'ensemble des $j \in I_m$ tels que $e^m_j \subset X\backslash A$. En effectuant la construction précédente pour tout $j \in J_m$, on obtient une rétraction r^m_j. Ainsi $\cup_{j \in J_m} e^m_j \cap N_\epsilon(A)$ se rétracte par déformation sur $\cup_{j \in J_m} e^m_j \cap N^{m-1}_\epsilon(A)$ en considérant $r^m := \cup_{j \in J_m} r_j$. On vérifie que la une rétraction $R : N(A) \times [0, 1] \to X$ donnée par l'identité sur $N(A) \times \{0\}$ et par r_n sur $N(A) \times [2^{-(n+1)}, 2^{-n}]$ convient.

Exercice 4. Théorême de Hurewicz ⋆

1. Soit $\sigma \in C_2(X;\mathbb{Z})$. Le bord de σ est définit par $\partial_2\sigma : (t_0,t_1) \longmapsto \sigma(0,t_0,t_1) + \sigma(t_0,0,t_1) + \sigma(0,t_0,t_1)$ Soit $\alpha : \Delta^1 \to X$ un chemin constant égal à $x \in X$. Soit $\sigma : \Delta^2 \to X$ le 2-simplexe constant égale à x. Alors $\partial\sigma(t_0,t_1) = x - x + x = x = \alpha(t_0,t_1)$ pour tout (t_0,t_1).
2. On veut construire une 2-chaîne singulière $\sigma \in C_2(X;\mathbb{Z})$ telle que $\partial_2\sigma = -\alpha + \alpha\beta - \beta$. L'idée est d'écrase un 2-simplexe sur deux arêtes puis on envoie la première sur α et la deuxième sur β. On vérifie que l'application suivante convient
$$\sigma(t_0,t_1,t_2) = \begin{cases} \alpha(1+t_1-t_0, t_0-t_1) & \text{si } t_1 \leq t_0 \\ \beta(t_1-t_0, 1+t_0-t_1) & \text{si } t_1 > t_0 \end{cases}$$
3. Le carré $[0,1]\times[0,1]$ est l'union de deux simplexes T_1 et T_2 tels que $\partial(H(T_1)) = \alpha - cst + H(\Delta)$ et $\partial(H(T_2)) = H(\Delta) - \beta + cst$, où Δ est la diagonale de $[0,1]\times[0,1]$ et H est l'homotopie entre α et β (à extrémités fixes, par définition.).
4. Ce morphisme est bien défini par la question 3, et c'est un morphisme de groupes par la question 2.
5. Commençons par montrer la surjectivité de ϕ. Soit $\sigma = \sum_{i=1}^k n_i\sigma_i$ un 1-cycle, c'est-à-dire un élément de $C_1(X;\mathbb{Z})$ de bord nul. En autorisant certains σ_i à être égaux, on peut supposer que pour tout i, $n_i = \pm 1$. Ensuite, puisque $-\sigma_i$ est homologue à $\bar{\sigma_i}$ (le chemin σ_i parcouru en sens inverse), nous pouvons supposer que les n_i sont en fait tous égaux à 1. Nous avons par hypothèse
$$\sum_{i=1}^k (\sigma_i(1) - \sigma_i(0)) = \partial\sigma = 0,$$
dans le groupe abélien libre $C_0(X;\mathbb{Z})$. En particulier, si σ_i n'est pas un lacet, il existe nécessairement un $j \neq i$ tel que $\sigma_j(0) = \sigma_i(1)$, de sorte que les lacets σ_i et σ_j soient composables. Mais alors d'après la question 2. on peut remplacer $\sigma_i + \sigma_j$ par leur concaténé $\sigma_i\sigma_j$ sans changer la classe d'homologie du 1-cycle considéré. En poursuivant ce processus par récurrence, on se ramène au cas où tous les σ_i sont des lacets. Il reste à en faire des lacets en x_0. Pour cela, pour tout $x \in X$, par connexité par arcs, on choisit un chemin ℓ_x reliant x_0 à x (constant si $x_0 = x$). Alors $\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}$ est homologue à σ_i pour tout i, donc on peut supposer que chaque σ_i est un lacet en x_0. Finalement, le cycle σ est homologue à l'image du lacet $\sigma_1 \dots \sigma_k$.
Montrons maintenant que le noyau de ϕ est exactement l'ensemble des commutateurs
$$[\pi_1(X,x_0), \pi_1(X,x_0)].$$
Tout d'abord, comme $H_1(X;\mathbb{Z})$ est abélien, ϕ se factorise par celui-ci, pour donner un morphisme surjectif
$$\phi_1(X,x_0)^{\mathrm{ab}} \to H_1(X;\mathbb{Z})$$
que nous noterons $\widetilde{\phi}$. Nous allons construire un morphisme $\widetilde{\psi}$ dans l'autre sens tel que $\widetilde{\psi}\circ\widetilde{\phi} = \mathrm{Id}$, ce qui impliquera que $\widetilde{\phi}$ est injectif. On utilisera la notation additive pour les éléments de $\phi_1(X,x_0)^{\mathrm{ab}}$.
On conserve la notation ℓ_x introduite ci-dessus. Par propriété universelle des produits abéliens libres, l'application qui à tout 1-simplexe singulier σ associe la classe dans $\pi_1(X,x_0)^{\mathrm{ab}}$ du lacet $\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}$ s'étend en un morphisme de groupes
$$\psi : C_1(X;\mathbb{Z}) \to \pi_1(X,x_0)^{\mathrm{ab}}.$$
Faisons quelques remarques à propos de ce morphisme :
   (a) Puisque nous avons choisi ℓ_{x_0} constant, un lacet en x_0 est envoyé exactement sur sa classe dans $\pi_1(X,x_0)^{\mathrm{ab}}$.

(b) Pour tout σ, nous avons
$$\psi(\bar{\sigma}) = -\psi(\sigma).$$
En effet, la classe du lacet $\ell_{\sigma(1)}\bar{\sigma}\overline{\ell_{\sigma(0)}}$ est l'inverse de la classe de ce lacet parcouru dans l'autre sens, à savoir $\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}$.

(c) Pour tous les 1-simplexes singuliers σ, τ tels que $\sigma(1) = \tau(0)$, l'image de $\sigma\tau$ est la classe de
$$\ell_{\sigma(0)}\sigma\tau\overline{\ell_{\tau(1)}},$$
qui est homotope à la concaténation
$$\ell_{\sigma(0)}\sigma\overline{\ell_{\sigma(1)}}\ell_{\tau(0)}\tau\overline{\ell_{\tau(1)}},$$
de sorte qu'on a $\psi(\sigma\tau) = \psi(\sigma) + \psi(\tau)$.

Revenons à la démonstration. Nous devons montrer que ψ passe au quotient par l'image de l'application de bord ∂. Soit donc $c : \Delta^2 \to X$ un 2-simplexe. Alors son bord est
$$\partial c = c \circ T_{(e_1,e_2)} - c \circ T_{(e_0,e_2)} + c \circ T_{(e_0,e_1)}.$$
D'après les remarques (b) et (c), l'image de ∂c par ψ est égale à celle du lacet
$$c \circ T_{(e_1,e_2)}\overline{c \circ T_{(e_0,e_2)}}c \circ T_{(e_0,e_1)}$$
Puisque Δ^2 se rétracte par déformation sur e_1, ce lacet est homotope au lacet constant égal à $c(e_1)$, et l'image de ce lacet par ψ est triviale. Finalement, ψ induit donc un morphisme
$$\widetilde{\psi} : H_1(X;\mathbb{Z}) \to \pi_1(X, x_0)^{\mathrm{ab}}.$$
D'autre part, d'après la remarque (a), nous avons bien $\widetilde{\psi} \circ \widetilde{\phi} = \mathrm{Id}$.

Exercice 5. Applications de paires ⋆ ⋆

Notons H l'homotopie entre f et g et H_A sa restriction à $A \times [0,1]$ qui est donc par définition une homotopie entre f_A et g_A, les restrictions à A de f et g respectivement. En cours, (prop 6.9) on montre que les applications
$$C_*(f), C_*(g) : C_*(X) \to C_*(Y)$$
sont homotopes, par une homotopie qui par construction se restreint en une homotopie entre
$$C_*(f_A), C_*(g_A) : C_*(A) \to C_*(B).$$
On obtient donc par passage au quotient, une homotopie entre
$$C_*(f), C_*(g) : C_*(X, A) \to C_*(Y, B)$$
de telle sorte que le diagramme suivant est commutatif
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A) \otimes I_* & \longrightarrow & C_*(X) \otimes I_* & \longrightarrow & C_*(X,A) \otimes I_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & C_*(B) \otimes I_* & \longrightarrow & C_*(Y) \otimes I_* & \longrightarrow & C_*(Y,B) \otimes I_* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$
Ce qui donne le résultat.

Exercice 6. Paires de Borsuk ⋆⋆

1. (a) $\Longrightarrow$ (b) On suppose que (X, A) est une paire de Borsuk. Notons i l'inclusion $(X \times 0) \cup (A \times I) \subset X \times I$. Alors l'application identité $(X \times 0) \cup (A \times I) \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ s'étend en une application $r : X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ telle que $r \circ i = \mathrm{id}$.

   (b) $\Longrightarrow$ (a) Réciproquement, supposons qu'il existe une rétraction $r : X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ et soit $H : (X \times 0) \cup (A \times I) \to Y$ une application continue. Alors $\bar{H} := H \circ r$ est l'extension voulue.

   (c) $\Longrightarrow$ (b) est immédiat.

   (b) $\Longrightarrow$ (c) Soit $r : X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ une rétraction. On définit une homotopie $H : X \times I \times I \to X \times I$ par $H(x, t, s) = (\pi_X \circ r(x, st), (1 - s)t + \pi_I \circ r(x, t))$ où $pi_X : X \times I \to X$ et $\pi_I : X \times I \to I$ sont les projections.
2. Soit $r : X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ une rétraction. On a la proposition suivante.

   Proposition : Soit $r : X \to A$ une rétraction. Si X est séparé, alors A est fermé dans X.

   Preuve. Montrons que $X \backslash A$ est ouvert. Soit $x \in X \backslash A$. Alors $r(x) \neq x$. Comme X est séparé, $r(x)$ et x admettent des voisinages $x \in U$ et $r(x) \in V$ disjoints. La rétraction r (vue comme $X \to A \hookrightarrow X$) est continue donc $r^{-1}(V)$ est ouvert et contient x. Ainsi $W := U \cap r^{-1}(V)$ est un ouvert de X contenant x. Soit $z \in W$. Alors $r(z) \in V$. Comme V et U sont disjoints, on a $r(z) \notin U$. Mais comme $z \in U$, on en déduit que $r(z) \neq z$ et donc $z \notin A$. Ainsi $A \cap W = \varnothing$ et W est un voisinage de x disjoint de A.

   Revenons à la question. Comme X est séparé, il en est de même pour $X \times I$ et on en déduit que $(X \times 0) \cup (A \times I)$ est fermé dans $X \times I$. On conclut que A est fermé dans X.
3. Si $r : X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$ est une rétraction alors il en est de même pour

$$\mathrm{id}_Y \times r : Y \times X \times I \longrightarrow Y \times A \times I \cup Y \times X \times 0 \ .$$

4. Voir [1, Proposition 0.16.]
5. On montre que $X \cup_f Y$ et $X \cup_g Y$ sont tous deux des rétractes par déformation de $(X \times I) \cup_h Y$ où $h : X \times I \to Y$ est une homotopie entre f et g. Par hypothèse, on a une rétraction (par déformation) $r : X \times I \to (X \times 0) \cup (A \times I)$. Elle induit une rétraction par déformation de $(X \times I) \cup_h Y$ sur $X \cup_f Y$ et de même pour $X \cup_g Y$.

Exercice 7. Cônes et équivalences d'homologie ⋆⋆⋆

1. Immédiat.
2. La première flèche est l'inclusion de D_* dans le second facteur et la deuxième est la projection sur le premier facteur.
3. Utiliser la description explicite du connectant.
4. Immédiat par la suite exacte longue en homologie.
5. Utiliser les composantes de l'homotopie pour construire des inverses homotopiques à gauche et à droite.

Références

[1] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Copyright © 2002 by Cambridge University Press.
`http://pi.math.cornell.edu/ hatcher/AT/AT.pdf`