

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ЛЕНИНА, ОРДЕНА ОКТЯБРЬСКОЙ РЕВОЛЮЦИИ,
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

Шапиро Борис Залманович

УДК 517.4 + 539.3

ОСОБЕННОСТИ ГРАНИЦ ПРОСТРАНСТВ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИИ

01.01.02. - Дифференциальные уравнения

Диссертация
на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
чл.-корр. АН СССР
проф. В.И.Арнольд

Москва - 1989

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава I. Предварительные сведения и основные результаты	8
§ I. Гиперболические многочлены и матрицы. Гиперболические уравнения и системы	8
§ 2. Неосцилляционные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и линейные гамильтоновы системы	12
§ 3. Основные результаты работы	19
Глава II. Особенности областей гиперболичности	31
§ I. Стабилизация особенностей гиперболических ростков функций и их связь с эллиптическими	31
§ 2. Теоремы версальности в пространствах многочленов и гиперповерхностей	38
§ 3. Стабилизация особенностей гиперболических гиперповерхностей	42
§ 4. Стабилизация особенностей гиперболических ростков матриц	52
§ 5. Простейшие особенности гиперболических ростков матриц.	
§ 6. Порядки уплощений оваловидов строго гиперболических гиперповерхностей (особенности волновых фронтов)	70
Глава III. Особенности областей неосцилляционности. Обобщенная теория перемежаемости. Штурма для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений	72
§ I. Кривые линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и распределение Картана	72
§ 2. Шлейфы в пространствах полных флагов	77
§ 3. Критерии (не-) осцилляционности линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и обобщенная теория перемежаемости Штурма	90

§ 4. Особенности областей неосцилляционности и особенности сечений шлейфов	97
§ 5. Неосцилляционные линейные гамильтоновы системы и особенности областей неосцилляционности	105
§ 6. Простейшие особенности областей неосцилляционности, встречающиеся в семействах гамильтоновых систем в пространстве (t, λ)	110
§ 7. Некоторые свойства наборов шлейфов в пространствах флагов и грассманианах	111
Литература	118

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения, обладающие такими свойствами, как эллиптичность, гиперболичность, неосцилляционность, устойчивость и т.д., образуют открытые области в соответствующих функциональных пространствах уравнений (линейных в частных производных, линейных обыкновенных и т.д.). Большое число работ посвящено изучению различных свойств уравнений, лежащих на границе этих областей (например, вырождающихся эллиптических, гиперболических, теряющих устойчивость и т.д.). Так, впервые задачу Коши для вырождающегося уравнения 2-го порядка рассматривал еще Дарбу. Однако систематическое изучение особенностей границ разных областей в пространствах дифференциальных уравнений началось в работах учеников В.И. Арнольда. Общая задача изучения границ таких областей была поставлена им в [47]. Были рассмотрены следующие конкретные вопросы. Так, Левантовским [36] была изучена граница области устойчивости в пространствах линейных дифференциальных уравнений, многочленов и матриц. Матов [44, 45] исследовал границу области эллиптичности в пространствах линейных уравнений в частных производных, многочленов и гладких функций. Казаряном [30] была рассмотрена граница области фундаментальности в пространствах наборов функций от одной переменной. Краткий обзор полученных результатов приведен в [6] (см. также [26]).

Во всех изученных случаях наблюдалась стабилизация особенностей изучаемого типа дифференциальных уравнений и особенностей границ их областей при увеличении естественных параметров задачи, каковыми, как правило, являются число переменных, порядки дифференциальных операторов, размеры систем и т.д. Кроме того, оказалось, что в рассмотренных случаях выполняется

принцип "хрупкости хорошего", означающий, что в типичных ситуациях (термин "типичность" требует уточнения в каждом конкретном случае) изучаемые области локально в окрестности особых точек своей границы являются топологическими многообразиями с краем и расположены "углами наружу", т.е. занимают менее полу пространства.

Эти факты позволили Арнольду (см. [3]) предположить, что стабилизация и "хрупкость хорошего" являются общими принципами при изучении уравнения с "хорошими" свойствами.

В настоящей работе изучаются особенности границы области гиперболичности в пространствах линейных дифференциальных уравнений и систем, а также критерии неосцилляционности и особенности границы области неосцилляционности в пространствах обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и линейных гамильтоновых систем. Основные результаты диссертации следующие.

1. Доказаны теоремы о стабилизации особенностей гиперболических многочленов и ростков функций и стабилизации особенностей границы областей гиперболичности при росте степени многочлена или одновременном росте степени и числа переменных.

2. Доказаны теоремы о стабилизации особенностей гиперболических матричных ростков при росте размера матрицы.

3. Доказаны теоремы о стабилизации особенностей областей неосцилляционности для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и линейных гамильтоновых систем при росте их порядка.

4. Доказана обобщенная теорема перемежаемости для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Опишем вкратце структуру глав диссертации.

Глава I (вводная). В § I определяются (локально) гиперболические уравнения и системы и приводятся основные сведения о

геометрии и топологии гиперболических гиперповерхностей.

В § 2 определяются неосцилляционные уравнения и гамильтоновы системы, приводятся известные следствия и критерии неосцилляционности.

В § 3 подробно формулируются основные результаты диссертации.

Глава II. В § I доказана теорема II.1 о стабилизации особенностей гиперболических ростков функций при увеличении числа переменных и теорема II.1.4, связывающая стабильные особенности гиперболических ростков функций n переменных с особенностями эллиптических ростков функций $n-1$ переменной.

§ 2 носит технический характер. В нем сформулированы принадлежащие А.Д.Вайнштейну результаты о стабилизации особенностей и бифуркационных диаграмм в пространствах многочленов (гиперповерхностей) достаточно высокой степени.

В § 3 на основе результатов § 2 изучаются особенности гиперболических полиномов (гиперповерхностей) фиксированной размерности и доказываются теоремы II.3.2 и II.3.4 о стабилизации списка этих особенностей при росте степени и реализации (с точностью до диффеоморфизма) любой стабильной гиперболической особенности на поверхности достаточно высокой степени.

В § 4 доказывается теорема II.4.3.3 о стабилизации бифуркационных диаграмм ростков матричных функций и областей гиперболическости при увеличении размера матрицы.

В § 5 изучаются простейшие бифуркационные диаграммы гиперболических ростков матриц в регулярном и сингулярном случаях.

В § 6 изучен восходящий к И.Г.Петровскому вопрос о порядках уплощения овалоидов строго гиперболической гиперповерхности.

Глава III. § I носит вспомогательный характер. В нем описываются сопоставляемые линейному обыкновенному уравнению кривые в линейном, проективном пространствах и пространстве полных флагов и описываются их свойства.

§ 2 также вспомогательный. В нем излагаются различные свойства шлейфов в пространствах флагов.

В § 3 показывается основной критерий осцилляционности — теорема III.3.2.I, а также теоремы III.3.2.I и III.3.4.I о перемежаемости.

В § 4 доказываются теоремы III.4.I и III.4.3, описывающие границу области неосцилляционности для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

В § 5 доказывается теорема III.5.2.I об областях неосцилляционности для линейных гамильтоновых систем.

В § 6 доказывается теорема III.6.I об особенностях областей неосцилляционности в семействах систем в пространстве (t, λ) .

В § 7 изложен материал, имеющий более специальный характер.

В нем изучается так называемое M -свойство набора шлейфов полных флагов в \mathbb{R}^3 .

Ниже используется следующая нумерация разделов текста. Первая римская цифра обозначает номер главы, вторая — номер параграфа, дальнейшие — номер пункта параграфа. Нумерация рисунков и формул сквозная.

ГЛАВА I. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

§ I. Гиперболические многочлены и матрицы. Гиперболические уравнения и системы

I.1. Гиперболические многочлены

Пусть $p(\xi_0, \dots, \xi_n)$ — однородный вещественный многочлен степени m и $\eta \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$.

I.1.1. Определение. Многочлен p называется гиперболическим относительно вектора η , называемого времениподобным, если для каждого вектора $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ $p(\xi + t\eta)$ имеет как многочлен от t m вещественных корней с учетом кратности. Если для любого ξ , не пропорционального η , все корни являются простыми, то многочлен p называется строго гиперболическим.

I.1.2. Определение. Проективизация (т.е. переход от $\mathbb{R}^{n+1} \setminus 0$ к $\mathbb{R}P^n$) множества нулей (строго) гиперболического многочлена называется (строго) гиперболической гиперповерхностью.

I.2. Гиперболические матрицы

I.2.1. Определение. Пусть P — квадратная матрица, элементы которой являются однородными многочленами одинаковой степени. P называется гиперболической, если многочлен $\det P$ гиперболичесок относительно некоторого вектора.

Пусть $x = (x_0, x') = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — координаты в \mathbb{R}^{n+1} , а $(x, \xi) = (x_0, x', \xi_0, \xi')$ — координаты в $T^* \mathbb{R}^{n+1}$. Для каждого мультииндекса $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum \alpha_k$ обозначим через D^α дифференциальный оператор $\prod_{k=1}^n (\partial / \partial x_k)^{\alpha_k}$, $i = \sqrt{-1}$.

Рассмотрим матричный линейный дифференциальный оператор m -го порядка вида

$$P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad (1)$$

где $a_\alpha(x)$ - гладкие матричные коэффициенты.

1.2.2. Определение. Символом оператора $P(x, D)$ называется матричная функция $P(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$. Главным символом оператора называется матричная функция $P_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$.

Главный символ является однородным многочленом степени m на каждом слое кокасательного расслоения $T^* \mathbb{R}^{n+1}$. Предположим, что для главного символа $P_m(x, \xi)$ выполнено условие нехарактеристичности по переменной x_0 , т.е. при всех x

$$\det P_m(x, 1, 0, \dots, 0) \neq 0. \quad (2)$$

1.2.3. Определение. Оператор (1) называется (строго) гиперболическим относительно переменной x_0 , если выполнено условие (2) и ограничение главного символа $P_m(x, \xi)$ на любой слой кокасательного расслоения является (строго) гиперболическим многочленом относительно вектора ξ_0 .

Это определение переносится на линейные дифференциальные операторы на многообразии (см., например, [40]). Однако так как в дальнейшем мы будем изучать только локальные свойства семейств гиперболических многочленов и матриц, то в такой общности оно нам не понадобится.

1.3. Основные направления теории гиперболических уравнений в частных производных

В силу чрезвычайной обширности библиографии по гиперболическим уравнениям и системам перечислим кратко лишь наиболее известные из работ.

Приведенное выше определение гиперболического оператора

принадлежит И.Г.Петровскому, который ввел его в несколько более общей ситуации. Его работы [49-51] положили начало многочисленным исследованиям по изучению разных типов корректности задачи Коши и смешанной краевой задачи для гиперболических операторов. Эта тема подробно освещена в ряде монографий [14, 46, 56]. Особо следует отметить работы школы Лере [38-41], в которых активно используется топологическая и алгеброгеометрическая техника. Обширный список литературы по гиперболическим операторам содержится в [20].

Другим достижением И.Г.Петровского была теория лакун (изучений свойств фундаментального решения) для строго гиперболических уравнений произвольного порядка с постоянными коэффициентами, построенная в работе [48]. Основным результатом этой работы явился гомологический критерий наличия лакуны (области пространства, в которой фундаментальное решение равно нулю) в терминах топологии комплексификации гиперболической поверхности уравнения (проективизации нулей главного символа).

Эти исследования были продолжены в работе Атьи, Ботта и Гординга [13], которые передоказали основной результат работы [48] алгебраическим способом, а также перенесли его на нестрогие гиперболические уравнения с постоянными коэффициентами. Детальное изучение поведения фундаментального решения (исследование резкости волнового фронта) в окрестности особой точки гиперболической поверхности было дано в работе Васильева [18]. Ряд результатов теории лакун был перенесен Гордингом на строго гиперболические уравнения с переменными коэффициентами.

1.4. Свойства гиперболических гиперповерхностей

Во многих из перечисленных работ детально изучаются различ-

ные аспекты геометрии гиперболических гиперповерхностей. Так как изучение границы области гиперболичности в пространстве дифференциальных (матричных) операторов эквивалентно изучению границы области гиперболичности в пространстве (матричных) многочленов, то в дальнейшем мы будем рассматривать этот последний случай. Сформулируем основные известные сведения о геометрии и топологии (строго) гиперболических гиперповерхностей.

Строго гиперболическая поверхность степени m в $\mathbb{R}P^n$ при четном m состоит из $m/2$ вложенных друг в друга и диффеоморфных сфере компонент, называемых овалоидами, а в случае нечетного m — из $(m-1)/2$ вложенных овалоидов и расположенной вне них односторонней компоненты, изотопной $\mathbb{R}P^{n-1}$. Внутренний овалоид является выпуклым (см. [13]). Вопрос о возможных уплощениях на других овалоидах изучается в § II.6.

В работе [73] Гординг получил обобщения неравенства Релея-Куранта-Фишера для собственных чисел квадратичных форм на произвольные гиперболические многочлены. Для описания геометрического смысла неравенств Гординга рассмотрим в \mathbb{R}^n однородную гиперповерхность нулей строго гиперболического многочлена. Неравенства Гординга означают, что если параллельно перенести внутренний конус (конус над внутренним овалом соответствующей проективной поверхности) множества нулей строго гиперболического многочлена в его другую точку, то локально в окрестности рассматриваемой точки ростки гиперповерхностей пересекаться не будут. В недавней работе [9] Арнольдом было дано естественное определение овалоидов для нестрого гиперболической гиперповерхности. Там показано, что особую гиперболическую гиперповерхность степени m также можно разбить на $[m/2]$ овалоидов, которые PL -эквивалентны S^{n-1} и при подходящем введении гладкой структуры диф-

дiffeоморфны S^{n-1} . В качестве интересного следствия им получен результат о сглаживаемости пространства $CP^2/Conj$, являющегося топологической сферой. (Заметим, что именно в этой размерности возможны наиболее патологические примеры.)

1.5. Локальная гиперболичность

Свойство гиперболичности многочлена (матрицы) имеет локальный аналог, рассмотренный Атьей, Боттом и Гордингом [13, 72].

1.5.1. Определение. Пусть $h: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — росток аналитической функции. Росток h называется гиперболическим, если существует проходящая через 0 прямая, называемая времениподобной, такая, что вещественная кратность* пересечения ростка гиперповерхности $H: \{h=0\}$ в пучке прямых, параллельных времениподобной, постоянна. Росток H называется гиперболическим ростком гиперповерхности.

1.5.2. Определение. Росток матричной функции называется гиперболическим, если росток ее детерминанта гиперболичесок.

§ 2. Неосцилляционные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения и линейные гамильтоновы

системы

2.1. Определения неосцилляционности

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка, заданное на отрезке $I = [a, b]$ оси времени t :

$$L_n[x] = x^{(n)} + a_1(t)x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)x = 0, \quad (3)$$

где $a_i \in C^\infty[I]$.

*Кратность корректно определена вследствие аналитичности и равна порядку нуля ограничения ростка дивизора на прямую.

2.1.1. Определение. Уравнение (оператор) (3) называется неосцилляционным на отрезке I , если любое его ненулевое решение имеет на I менее n корней с учетом кратности. В противном случае оно называется осцилляционным*.

Рассмотрим в $T^*\mathbb{R}^n$ с естественными координатами (p, q) линейную гамильтонову систему, заданную на отрезке I оси времени t :

$$\begin{cases} \dot{q} = B(t)q + C(t)p \\ \dot{p} = -A(t)q - B^T(t)p, \end{cases} \quad (4)$$

где A, B и C — гладкие матричные коэффициенты, A и C — симметричны.

2.1.2. Определение. Система (4) называется неосцилляционной на I , если для любого ее ненулевого решения $(p(t), q(t))$ q обращается в нуль на I не более одного раза.

2.2. Основные свойства неосцилляционных уравнений

При изучении свойства неосцилляционности возникают две основные проблемы:

- а) изучение различных следствий неосцилляционности;
- б) отыскание эффективных способов проверки неосцилляционности.

Разработка этого круга вопросов восходит к классическому memoirу Штурма [87], в котором изучается самосопряженное уравнение 2-го порядка, являющееся также (после применения преобразования Лежандра) линейной гамильтоновой системой. В этом (и единственном) случае оба определения неосцилляционности совпадают. Изучение неосцилляционности было продолжено во весьма многочисленных позднейших исследованиях. Так, в разное время неосцилля-

*В англоязычной литературе для обозначения неосцилляционности используется термин "disconjugate", обозначающий отсутствие сопряженных точек, а термин "nonoscillatory" используется для уравнений, все решения которых имеют конечное число нулей.

ционностью обыкновенных уравнений занимались П.Л.Чебышев, Н.Е.Жуковский, Д.Поля, Ш.Валле-Пуссен, С.А.Чаплыгин, С.Н.Бернштейн, М.Г.Крейн, Ф.Хартман, А.Винтнер, В.А.Кондратьев, Р.Беллман, И.М.Глазман, А.Ю.Левин и др. (см., например [24, 35, 37, 55, 75, 79, 84-86] и приведенные там ссылки).

Рассмотрим основные следствия неосцилляционности линейных обыкновенных уравнений (3) и ее связи с различными аспектами качественной теории.

1) Разложение Поля-Маммана:

оператор L_n является неосцилляционным на $[a, b]$, тогда и только тогда, когда он допускает разложение

$$L_n = g_n \frac{d}{dt} \left(g_{n-1} \left(\frac{d}{dt} \dots g_1 \left(\frac{d}{dt} \right) \dots \right) \right),$$

где g_i - вещественные достаточно гладкие и не обращающиеся в нуль функции (заметим, что аналогичное разложение с комплексными g_i возможно всегда).

2) Критерий неосцилляционности Поля (вытекающий из указанного выше разложения):

оператор L_n является неосцилляционным на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда найдется фундаментальная система решений $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ уравнения (3), такая что для всех $i = \overline{1, n}$ вронскианы систем функций $\varphi_1, \dots, \varphi_i$ отличны от нуля на $[a, b]$.

3) Оператор L_n является неосцилляционным тогда и только тогда, когда существует единственное решение краевой задачи

$$L_n[x] = f(t), \quad x^{(i)}(t_j) = a_{ij}, \quad a \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq b,$$

где $i = \overline{0, k_j - 1}$, $j = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^m k_i = n$.

Имеется интересная связь между неосцилляцией и теорией осцилляционных ядер, возникшей в работе Каллога [76] и получившей

свое развитие в работах Гантмахера и Крейна [24, 22, 33, 34, 38].
Следствием теории является, например, следующий интересный факт:

для неосцилляционного оператора L_n краевая задача

$$L_n[x] = \lambda f(t), \quad f > 0$$

с краевыми условиями

$$x(a) = x'(a) = \dots = x^{n-k+1}(a) = 0,$$

$$x(b) = x'(b) = \dots = x^{k-1}(b) = 0$$

имеет только вещественные собственные значения, совпадающие по знаку с $(-1)^k$, и m -я собственная функция имеет на (a, b) ровно $m-1$ корень.

Во многих работах изучался вопрос о так называемых полуэффективных критериях проверки неосцилляционности.

Так, например, Азбелев (см. [1]) предложил следующий полуэффективный критерий для уравнения 3-го порядка:

L_3 неосцилляционен на $[a, b)$ тогда и только тогда, когда существуют функции g_1 и g_2 такие, что $g_i(a) = 0$, $g_i(t) > 0$ на (a, b) и $L_3 g_1 \leq 0$, $L_3^* g_2 \geq 0$, где L_3^* — оператор, формально сопряженный с L_3 . Обобщая работу Азбелева, Левин [37] получил следующий полуэффективный критерий неосцилляционности.

Критерий Левина. L_n неосцилляционен на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда существует система функций g_1, \dots, g_n такая, что

а) на $[a, b)$ положительны вронскианы всех подсистем вида

$$g_k, g_{k+1}, \dots, g_{n-1} \quad k = \overline{1, n-1}; \quad g_k, g_{k+1}, \dots, g_{\ell-1}, g_{\ell+1}, \dots, g_{n-1} \quad (1 \leq k < \ell \leq n-1)$$

$$б) (-1)^k L_n g_k \geq 0, \quad t \in (a, b), \quad k = \overline{1, n-1}.$$

2.3. Основные работы по теории Штурма для линейных гамильтоновых систем

Изучение аналогов теории Штурма для линейных гамильтоновых

систем было начато в работах Морса [81,82], который получил формулу для индекса экстремали положительно определенной вариационной задачи с заданными граничными условиями через число сопряженных точек и некоторый остаточный член, названный им порядком вогнутости ("order of concavity"). Этот остаточный член зависит только от граничных условий и преобразования монодромии. Обобщенная теория Штурма для линейных гамильтоновых систем получили свое развитие в работах Лидского [42], Ботта [61], Эдвардса [60], Дюистермаата и Кушмана [66,69], Клингенберга [31], Арнольда [7] и др., в которых, в частности, приводятся достаточные условия неосцилляционности линейной гамильтоновой системы. Например, в работе [7] доказывается, что натуральная система с неположительной потенциальной энергией будет неосцилляционной.

2.4. Критерий неосцилляционности уравнения

Приведем важную переформулировку свойства неосцилляционности уравнения (3), которая позволит нам описать основные результаты работы.

Пусть \mathcal{M} — грассманиан или пространство (не-) полных флагов в \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n), а α — некоторый фиксированный полный флаг.

2.4.1. Определение. Шлейфом \mathcal{W}_α флага α в \mathcal{M} называется множество всех таких точек $\mu \in \mathcal{M}$, что найдутся подпространства, принадлежащие μ , и находящиеся в необщем положении с подпространствами флага α .

Множество точек $\mu \in \mathcal{M}$, таких что набор размерностей пересечений их подпространств с подпространствами флага α постоянен, является клеткой в \mathcal{M} (гомеоморфно диску, см., например, [59]). Множество этих клеток задает стандартное клеточное разбиение пространства \mathcal{M} , построенное по флагу α . Шлейф \mathcal{W}_α является объ-

единением всех клеток положительной коразмерности построенного по α шубертовского разбиения.

Пусть уравнение (3) задано на отрезке $I = [a, b]$. Обозначим через V n -мерное линейное пространство $(n-1)$ -струй функций в точке a . Уравнение (3) задает однопараметрическое семейство $\{G_t\}$, $t \in [a, b]$, линейных преобразований пространства V .

(Напомним, что для $v = (v_0, \dots, v_{n-1}) \in V$ $G_t(v) = (\varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$, где φ - решение уравнения (3) такое, что $\varphi(a) = v_0, \dots, \varphi^{(n-1)}(a) = v_{n-1}$.)

Однопараметрическое семейство $\{G_t\}$, задаваемое уравнением (3), действует на пространстве F_V полных флагов в V .

2.4.2. Определение. Стандартным флагом $\{s\}$ в пространстве решений V называется флаг, i -мерная плоскость которого натянута на i первых координат $x, \dots, x^{(i-1)}$ пространства V .

2.4.3. Определение. Траекторию $tr_{\{s\}}$ стандартного флага под действием семейства $\{G_t\}$ назовем флаговой кривой уравнения (3).

2.4.4. Основная переформулировка свойства неосцилляционности уравнения.

Уравнение (3) неосцилляционно на $I = [a, b]$ тогда и только тогда, когда его флаговая кривая $tr_{\{s\}}$ не пересекает шлейфа $\cup_{\{s\}}$ на полуинтервале $(a, b]$.

Заметим, что флаговую кривую уравнения можно определить другим инвариантным способом (см. § 2.1). отождествим V с пространством решений уравнения (3), сопоставив каждому решению его $(n-1)$ -струю в точке a . Тогда $tr_{\{s\}}$ в F_V задается следующим условием:

i -мерное подпространство флага $tr_{\{s\}}(t)$ состоит из решений уравнения (3), имеющих в момент t нуль кратности $\geq n-i$.

2.5. Критерий неосцилляционности системы

Приведем теперь аналогичную переформулировку свойства неосцилляционности для гамильтоновых систем.

Пусть Λ_n — лагранжев грассманиан, т.е. множество неориентированных лагранжевых плоскостей* в $T^*\mathbb{R}^n$.

2.5.1. Определение. Шлейфом \mathcal{W}_α лагранжевой плоскости $\alpha \in \Lambda_n$ называется множество лагранжевых плоскостей, не трансверсальных α .

2.5.2. Определение. Выберем в Λ_n лагранжеву плоскость p , задаваемую соотношением $\{q=0\}$ (слой $T^*\mathbb{R}^n$). Эту плоскость будем называть стандартной лагранжевой плоскостью.

Система (4) задает однопараметрическое семейство симплектических преобразований пространства $T^*\mathbb{R}^n$, которое действует на Λ_n .

2.5.3. Определение. Назовем траекторию tr_p плоскости p лагранжевой кривой линейной гамильтоновой системы (4).

2.5.4. Основная переформулировка свойства неосцилляционности системы.

Система (4) неосцилляционна на $I=[a,b]$ тогда и только тогда, когда ее лагранжева кривая tr_p не пересекает \mathcal{W}_p на полуинтервале $(a,b]$.

Сформулируем для полноты картины основные теоремы теории Штурма для системы (4), полученные в работе [7].

Теорема перемежаемости. Если функция Гамильтона H (являющаяся зависящей от времени квадратичной формой на $T^*\mathbb{R}^n$) положительно определена на лагранжевых плоскостях α и β , то сумма кратностей числа пересечений $\#_\alpha$ и $\#_\beta$ траектории любой лагран-

Напомним, что n -мерная плоскость в $T^\mathbb{R}^n$ называется лагранжевой, если на ней обращается в нуль стандартная 2-форма $\omega = \sum dp_i \wedge dq_i$, задающая в $T^*\mathbb{R}^n$ симплектическую структуру.

жевой плоскости с \sqcup_α и \sqcup_β удовлетворяют неравенству:

$$|\#_\alpha - \#_\beta| \leq n.$$

Следствие. На отрезке, содержащем $n+1$ момент нетрансверсальности к α , найдется момент нетрансверсальности к β .

Теорема сравнения. Пусть H и H' положительно определены на некоторой плоскости α и $H' > H$, тогда для траектории любой лагранжевой плоскости и чисел пересечения $\#_\alpha(H)$ и $\#_\alpha(H')$ выполняется неравенство $\#_\alpha(H') \geq \#_\alpha(H) - n$.

2.6. Контрпример к классическому обобщению теории перемежаемости

Заметим, что попытка построения классического аналога теорем перемежаемости Штурма для обыкновенных дифференциальных уравнений наталкивается на естественные сложности. Приведем для примера следующий результат Кондратьева [32], который показывает, что на аддитивный аналог теоремы перемежаемости Штурма для уравнений высокого порядка рассчитывать не приходится.

Теорема Кондратьева. Для уравнения $x^{(n)} + a(t)x = 0$ и для любого натурального m существует функция $a(t) > 0$, такая, что между двумя последовательными нулями некоторого нетривиального решения существует m нулей другого решения.

В § 3.3 описан неклассический аналог теоремы перемежаемости для линейных дифференциальных уравнений любого порядка.

§ 3. Основные результаты работы

Сформулируем основные результаты работы по четырем изучаемым темам: гиперболические многочлены, гиперболические матрицы, неосцилляционные линейные обыкновенные дифференциальные урав-

нения и неосцилляционные линейные гамильтоновы системы. (В такой же последовательности они рассмотрены в основном тексте).

3.1. Гиперболические многочлены*

Теорема П.1. Особенности гиперболических ростков функций и особенности границ областей гиперболичности, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах, стабилизируются с ростом числа переменных.

3.1.1. Определение. Росток функции $e: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ называется эллиптическим, если прообраз нуля состоит только из точки 0 в \mathbb{R}^n .

Теорема П.1.4. При любом числе k параметров встречающиеся в типичных k -параметрических семействах особенности стабильных гиперболических ростков функций стабильно эквивалентны особенностям эллиптических ростков.

Напомним, что стабильная эквивалентность двух ростков функций от разного числа переменных означает, что они становятся эквивалентными (т.е. лежат на одной орбите действия группы диффеоморфизмов) после сложения с невырожденными квадратичными формами от дополнительных переменных (см. [12] стр. 146).

3.1.2. Определение. Назовем версальной деформацией ростка гиперповерхности $H: \{h=0\}$, трансверсаль к орбите H под действием группы диффеоморфизмов пространства. (Очевидно, что версальная деформация ростка H совпадает с V -версальной деформацией ростка h .)

Теорема П.2.1. (А.Д.Вайнштейн). Пусть Γ — вещественная алгебраическая гиперповерхность степени d , все особые точки ко-

*Основные результаты об областях гиперболичности для многочленов изложены в совместных с А.Д.Вайнштейном работах [16, 17]. А.Д.Вайнштейну принадлежат результаты, изложенные в § П.2.

торой вещественны (число их равно r), μ_r — сумма чисел Милнора всех особых точек, причем $d > \mu_r + 3r - 4$. Тогда малая окрестность V_r поверхности Γ в пространстве поверхностей той же степени является ростком версальной деформации мультиособенности поверхности Γ (V -версальной деформацией особенностей с нулевым критическим значением задающего ее многочлена). Росток дискриминанта (множество особых гиперповерхностей) диффеоморфен цилиндру над ростком бифуркационной диаграммы мультиособенности рассматриваемой гиперповерхности.

Предложение II.3.1. Любая особенность гиперболической гиперповерхности является локально гиперболической (в смысле определения I.1.5.1).

Теорема II.3.2. Любая изолированная особенность аналитического гиперболического ростка функции (гиперповерхности) может быть реализована (с точностью до диффеоморфизма) на гиперболической гиперповерхности достаточно высокой степени.

Теорема II.3.4. При фиксированном числе параметров список типичных особенностей (мультиособенностей) гиперболических гиперповерхностей фиксированной размерности стабилизируется при увеличении степени.

Перечислены мультиособенности, возникающие в типичных семействах гиперболических гиперповерхностей достаточно высокой степени с фиксированной времениподобной точкой при ≤ 3 параметрах. Соответствующие области гиперболичности в этих случаях расположены „углами наружу“. Заметим, что для стабильных гиперболических ростков функций этот факт следует из теоремы II.3.2 и результатов Матова [44, 45].

3.2. Гиперболические матрицы

Начнем со следующего определения. Пусть C — стратифицированное подмногообразие в \mathbb{R}^n .

3.2.1. Определение. Росток отображения $f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, C)$ называется трансверсальным к C , если он трансверсален каждому из стратов C (см. [12] стр. 33).

Пусть C — аналитическая гиперповерхность в \mathbb{R}^n , снабженная какой-нибудь естественной стратификацией (например, по Тому-Бордману). (Ниже в качестве C будет рассматриваться гиперповерхность вырожденных матриц или квадратичных форм, снабженная стратификацией по рангам.) Пусть $f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, C)$ — росток отображения, не трансверсального ростку C , а \mathcal{O}_C — группа правых замен, сохраняющих C , т.е. произведение группы диффеоморфизмов прообраза и группы диффеоморфизмов образа, сохраняющих C . Обозначим через $\mathcal{O}_C f$ орбиту отображения f под действием группы \mathcal{O}_C , а через $K_C f$ — орбиту прообраза $f^{-1}(C)$ под действием группы \mathcal{O}_C (по аналогии с право-левой и V -эквивалентностями). В этом случае верны теоремы о конечной определенности ростка f и существовании версальных деформации* $\Phi(x, \lambda): (\mathbb{R}^l, 0) \times Q \rightarrow (\mathbb{R}^n, C)$ и $\bar{\Phi}(x, \lambda): (\mathbb{R}^l, 0) \times \bar{Q} \rightarrow (\mathbb{R}^n, C)$, являющихся трансверсальными к $\mathcal{O}_C f$ и $K_C f$ соответственно (см. [68] и § II.4).

3.2.2. Определение. Бифуркационной диаграммой версальной деформации $\Phi(x, \lambda)$ называется множество параметров, при которых отображение $\Phi(x, \cdot)$ не трансверсально ростку C .

Обозначим через Mat_N ($S\text{Mat}_N$) пространство всех $N \times N$ -матриц (квадратичных форм), а через Δ_N ($S\Delta_N$) — гиперповерхность вырожденных матриц (квадратичных форм). Пусть f — росток (симмет-

*Определение конечной определенности и версальной деформации см. [12] стр. 94 и II.2.

ричной) матричной функции. Как указано выше, из общих результатов работ [67,68] следует конечная определенность f вне множества бесконечной коразмерности и существование версальных деформаций Φ и $\bar{\Phi}$, являющихся трансверсальными к орбитам $\sigma_{\Delta_N} f$, $\sigma_{S\Delta_N} f$ и $K_{\Delta_N} f$, $K_{S\Delta_N} f$ соответственно. Напомним, что росток матричной функции называется гиперболическим, если росток детерминанта этой матричной функции гиперболичесок.

Теорема II.4.3.3. Бифуркационные диаграммы версальных деформаций и области гиперболичности ростков (симметричных) матриц, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах, стабилизируются с ростом размера матрицы.

3.2.3. Определение. Росток отображения $f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, C)$ назовем регулярным, если а) f - субмерсия; б) $f(0)$ является гладкой точкой одного из стратов старшей размерности ростка C (т.е. C можно заменить на гладкий росток). В противном случае f называется сингулярным.

Замечание II.5.1. (Б.А.Хесин). Версальная деформация и бифуркационная диаграмма регулярного ростка $f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, C)$ совпадают с V -версальной деформацией* и бифуркационной диаграммой следующего отображения f_c . Пусть h_1, \dots, h_k - ростки функций, такие что система $\{h_i=0\}$ задает гладкий росток C как полное пересечение ($k = \text{codim } C$). Тогда отображение $f_c: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ является ограничением набора функций h_1, \dots, h_k на образ $f(\mathbb{R}^l)$.

Следствие II.5.1.2. Версальные деформации Φ и $\bar{\Phi}$ регулярного ростка f (симметричной) матричной функции совпадают с V -версальной деформацией ростка функции $\det f$, получаемой композицией отображения f и взятия определителя матрицы (квадратичной формы). Тем самым, в регулярном случае особенности границы области гиперболичности для ростков матриц совпадают с особенностями гра-

*Определение V -версальной деформации см. [12] стр. 97.

ницы области гиперболичности для ростков функции.

Изучены особенности простейших сингулярных матричных ростков.

Теорема II.5.2. 1) Пусть $\gamma_k : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (S\text{Mat}_2^1, 0)$ — росток гладкой матричной кривой, касающейся образующей конуса $S\Delta_2$ с порядком $k-1$ (напомним, что $S\Delta_2$ задается уравнением $b^2 - ac = 0$). Тогда бифуркационная диаграмма ростка γ_k совпадает с бифуркационной диаграммой версальной деформации особенности D_{k+1} . Она состоит из всех таких наборов $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$, при которых многочлен $t^{k+1} + \lambda_1 t^k + \dots + \lambda_k t - \lambda_{k+1}^2$ имеет по t кратный корень.

Г') Для ростка гладкой кривой $\gamma'_k : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\text{Mat}_2, 0)$ с аналогичными свойствами бифуркационная диаграмма (с точностью до диффеоморфизма) состоит из всех наборов $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+2}$, при которых многочлен $t^{k+1} + \lambda_1 t^k + \dots + \lambda_k t - \lambda_{k+1} \lambda_{k+2}$ имеет кратный корень.

2) Пусть Γ_k — росток гладкого отображения $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (S\text{Mat}_2, 0)$, для которого максимальный порядок касания в нуле с образующими конуса равен $k-1$. Его бифуркационная диаграмма совпадает с бифуркационной диаграммой особенности B_k , состоящей из всех наборов $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, при которых многочлен $t^k + \lambda_1 t^{k-1} + \dots + \lambda_k$ имеет нулевой или кратный корень.

3) Пусть Γ — росток отображения $(\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (S\text{Mat}_2, x)$, где x — любая гладкая точка на $S\Delta_2$, а образ \mathbb{R}^2 является в окрестности x зонтиком Уитни^{*}, т.е. локально диффеоморфен поверхности, заданной уравнением $b^2 = ac^2$. Тогда бифуркационные диаграммы ростка Γ совпадают с бифуркационными диаграммами особенностей серии B или θ в зависимости от того, касается ли росток Γ прямых b, c или плоскости (b, c) , натянутой на прямые b и c (см. рис. I). Бифуркационная диаграмма особенности серии θ состоит из всех таких наборов $\lambda_0, \dots, \lambda_k$, при которых кривая, заданная уравнением $(\lambda_0 x + y^k + \lambda_1 y^{k-1} + \dots + \lambda_k)^2 + x^2 y = 0$, является не общей

^{*}Определение зонтика Уитни см. [12] стр. 21.

в пространстве параметров $\lambda_0, \dots, \lambda_k$. Условие нербожности распадается на три случая:

а) нетрансверсальность точке 0 (многочлен $p(y)$ имеет в нуле корень);

б) нетрансверсальность оси b (многочлен $p(y)$ имеет кратный корень);

в) нетрансверсальность гладкой части зонтика (λ_0^2 является корнем $p(y)$).

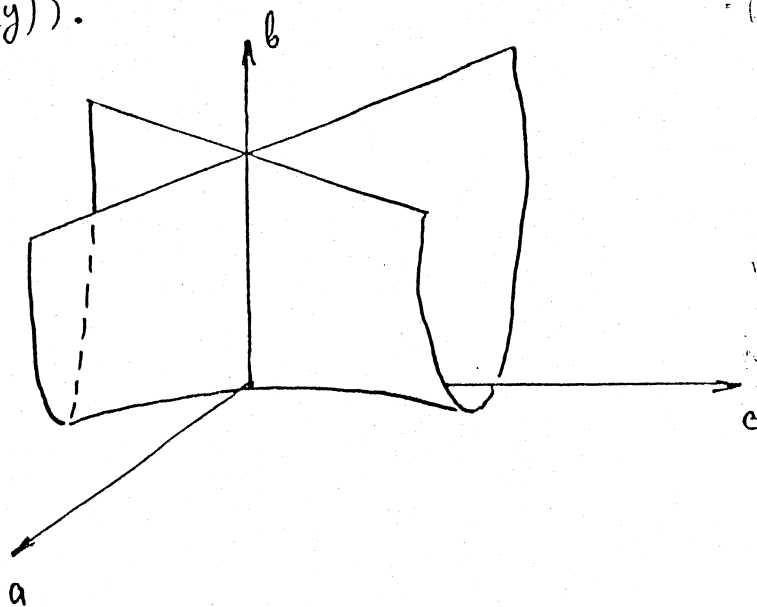


Рис. 1. Зонтик Уитни

3.3. Неосцилляционные обыкновенные уравнения

Теорема Ш.3.2.1 флаговая кривая осцилляционного уравнения пересекает шлейф любого флага.

3.3.1. Определение. i -й компонентой шлейфа \mathcal{W}_α флага α , принадлежащего многообразию полных флагов в \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n), называется множество полных флагов, таких что их i -мерные подпространства нетрансверсальны $(n-i)$ -мерному подпространству флага α .

Теорема Ш.2.6.1. Локально среди компонент дополнения до шлейфа \mathcal{W}_α в пространстве полных флагов F_n содержатся 2^{n-1}

компонент, которые отождествляются с верхнетреугольными матрицами с единичной диагональю, имеющими отличными от нуля определители всех миноров, не содержащих строки или столбца под главной диагональю.

Лемма Ш.2.8.I. Кратность пересечения ростка флаговой кривой со шлейфом флага зависит только от клетки разбиения Шуберта, которой принадлежит точка пересечения.

Теорема Ш.3.3.I. Суммарная кратность $\# \#_i$ пересечения флаговой кривой неосцилляционного уравнения (3) с i -й компонентой шлейфа любого флага не превосходит $\dim G_{i,n} = i(n-i)$.

3.3.2. Замечание. Пересечение флаговой кривой линейного дифференциального уравнения с некоторой компонентой шлейфа фиксированного флага (например, с i -й) имеет следующую более наглядную интерпретацию. Каждый полный флаг определяет флаг решений, т.е. фундаментальную систему решений Ψ_1, \dots, Ψ_n , где каждое следующее решение определено с точностью до прибавления линейной комбинации предыдущих. Тогда пересечение флаговой кривой уравнения с i -й компонентой шлейфа рассматриваемого флага соответствует обращению в нуль вронскиана соответствующей этому флагу части системы решений Ψ_1, \dots, Ψ_i .

Как указывалось в I.2.6, построение разумного классического аналога теорем перемежаемости для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений не представляется возможным. Однако если рассматривать кроме корней решений все моменты нетрансверсальности флаговой кривой произвольного уравнения (3) со шлейфами различных флагов (в духе [7]), то получается следующая обобщенная теорема перемежаемости, которая носит не аддитивный, а мультипликативный характер.

Следствие Ш.3.4.1. Если на некотором отрезке времени I флаговая кривая уравнения пересекает i -ю компоненту шлейфа некоторого флага более чем $i(n-i)$ раз (с учетом кратности), то она пересекает шлейф любого флага и, тем самым, уравнение осциллиционно.

Следствие Ш.3.4.2. (Обобщенная теорема перемежаемости Штурма). Для любого линейного дифференциального уравнения n -го порядка для положительных кратностей $\#_\alpha$ и $\#_\beta$ пересечения флаговой кривой со шлейфами \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β выполнено следующее неравенство:

$$6/(n^3-n+6) \leq \#_\alpha/\#_\beta \leq (n^3-n+6)/6.$$

Приведенные оценки, повидимому, являются точными.

Теорема Ш.4.1. Уравнение (3) лежит на границе области неосцилляционных уравнений тогда и только тогда, когда единственной парой нетрансверсальных флагов ее флаговой кривой являются ее начало и конец.

Теорема Ш.4.3. Особенности границы области неосцилляционных уравнений, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах, диффеоморфны особенностям типичных k -параметрических сечений шлейфа.

Термин "типичное семейство уравнений" означает принадлежность некоторому открытому всюду плотному множеству в пространстве семейств, а "типичное сечение шлейфа" — трансверсальность его стандартной стратификации.

Теорема Ш.4.4. Особенности типичных k -параметрических сечений шлейфа обладают следующими свойствами:

а) они не меняются (с точностью до диффеоморфизма) вдоль клеток разбиения Шуберта;

б) при любом k список типичных особенностей сечений конечен (не имеет модулей);

в) списки типичных особенностей k -параметрических сечений растут с ростом размерности пространства и стабилизируются при $n \geq 2k$.

Перечислим стабильные особенности типичных сечений шлейфа при малых k .

При $k = 2$ встречается единственная особенность. Она задается уравнением:

$$xy = 0.$$

При $k = 3$ встречаются 2 особенности:

$$xyz = 0 \quad \text{и} \quad z(z - xy) = 0.$$

При $k = 4$ встречаются 2 особенности:

$$xyzu = 0 \quad \text{и} \quad zu(z - xy) = 0.$$

Общий рецепт получения списка особенностей при любом k приведен в Ш.4.4.

Теорема Ш.7.1. Множество $F^{\mathbb{R}}$ всех флагов, трансверсальных ко всем флагам типичного набора полных флагов в \mathbb{R}^3 , является вещественно алгебраическим M -многообразием, т.е. удовлетворяет соотношению

$$\sum b_i(F^{\mathbb{R}}) = \sum b_i(F^{\mathbb{C}})$$

где b_i - числа Бетти с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а $F^{\mathbb{C}}$ - комплексификация $F^{\mathbb{R}}$.

3.4. Линейные гамильтоновы системы

Введем следующие 4 класса гамильтоновых систем, часто встречающиеся в приложениях.

3.4.1. Определение. Линейная гамильтонова система, заданная на отрезке $I = [a, b]$ называется:

а) локально неосцилляционной, если росток траектории tr_p в окрестности точки a не лежит на шлейфе \mathcal{W}_p ;

б) p - положительной, если ограничение гамильтониана (являющегося зависящей от времени квадратичной формой в $T^*\mathbb{R}^n$) на плоскость p является положительно определенным;

в) положительной, если ограничение гамильтониана на любую лагранжеву плоскость является положительно определенным;

г) вариационным уравнением, если она является преобразованием Лежандра формально самосопряженного линейного обыкновенного уравнения.

Очевидны следующие включения: в) \subset б) \subset а) и г) \subset а). Неосцилляционные системы образуют в каждом из 4-х классов открытые непустые области. Заметим, что неосцилляционность систем четвертого класса рассматривалась еще Глазманом и Крейном [25, 78].

Теорема Ш.5.2.1. Особенности границы областей неосцилляционности, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах систем любого из 4-х классов, диффеоморфны особенностям типичных k -параметрических сечений шлейфа.

Замечание. Особенности типичных k -параметрических сечений шлейфа локально диффеоморфны цилиндрам над гиперповерхностями $S\Delta_n$ вырожденных квадратичных форм.

Пусть $\Gamma(\lambda)$ - семейство линейных гамильтоновых систем. Рассмотрим задачу о границе области неосцилляционности в пространстве параметров (t, λ) , где t - время.

Теорема Ш.6.1. Особенности границы неосцилляционности, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах систем 2-го порядка классов а) - в) с гладкой траекторией tr_p , расслоено диффеоморфны гиперповерхностям

$$t^{k+1} + \lambda_1 t^{k-1} + \dots + \lambda_k = 0$$

ИЛИ

$$t^k + \lambda_1 t^{k-1} + \dots + \lambda_{k-1} t - \lambda_k^2 = 0$$

(напомним, что в пространстве (t, λ) важна структура одномерного расслоения по t).

ГЛАВА II. ОСОБЕННОСТИ ОБЛАСТЕЙ ГИПЕРБОЛИЧНОСТИ

§ I. Стабилизация особенностей гиперболических ростков функций и их связь с эллиптическими

В этом параграфе рассматривается пространство \mathcal{O}_n^0 ростков аналитических функций от n переменных, имеющих особенность в нуле, и доказывается следующая теорема.

Теорема. Список особенностей гиперболических ростков функций, встречающихся в типичных семействах с фиксированным числом k параметров, стабилизируется с ростом n . Указанная стабилизация наступает при $n(n+1) > 2k$.

Ниже нас будут интересовать только особенности с конечным числом Милнора. Поэтому под изолированностью особенности мы будем понимать изолированность ее комплексификации (конечнократность), хотя некоторые из приводимых результатов верны и для вещественно изолированных, но не конечнократных особенностей.

I.I. Инвариантность локальной гиперболичности

Докажем, что свойство гиперболичности ростка инвариантно относительно диффеоморфизма. Доказательство разобьем на ряд лемм.

I.I.I. Лемма. Пусть $h: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — гиперболический росток функции с изолированной особенностью, а γ — времениподобная прямая для h . Тогда любая проходящая через 0 прямая, достаточно близкая к γ , также является времениподобной.

Доказательство. В случае $n=2$ росток кривой $H: \{h=0\}$ состоит из набора гладких ветвей, трансверсальных прямой γ ([13], с. 62). Следовательно, углы, образуемые ими с прямой γ , положительны. Обозначим минимальный из этих углов через ε . Оче-

видно, что h гиперболичесен относительно любой прямой, образующей с γ угол, меньший ε . Кроме того, хотя бы для одной из прямых, образующих с γ угол, равный ε , вещественная кратность ее пересечения с ростком кривой H больше чем у γ . Обозначим эту прямую через $\bar{\gamma}$.

В случае $n > 2$ рассмотрим многообразие $\mathcal{M} = \mathbb{R}P^{n-2}$ всех двумерных плоскостей, содержащих γ . Ограничение h на любую из этих плоскостей является двумерным гиперболическим ростком. Действуя как описано выше, сопоставим каждой плоскости $\mu \in \mathcal{M}$ число $\varepsilon(\mu) > 0$. Покажем, что $\varepsilon(\mu)$ отделено от нуля. Действительно, пусть существует последовательность $\{\mu_i\} = \mu_1, \dots, \mu_i, \dots$, для которой последовательность $\{\varepsilon_i\} = \{\varepsilon(\mu_i)\}$ стремится к нулю. Выберем из $\{\mu_i\}$ подпоследовательность $\{\bar{\mu}_i\}$, сходящуюся к некоторой плоскости $\bar{\mu}$ из \mathcal{M} . Рассмотрим в каждой из плоскостей $\bar{\mu}_i$ прямую $\bar{\gamma}_i$, построенную как описано выше. Последовательность прямых $\bar{\gamma}_i$ сходится к исходной времениподобной прямой γ . Так как для каждой из $\bar{\gamma}_i$ кратность пересечения с ростком H выше чем у γ , и кратность полунепрерывна сверху, то получаем противоречие. Лемма доказана.

1.1.2. Пусть $B_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ — малая окрестность нуля. Зафиксируем ориентацию времениподобной прямой γ и рассмотрим компоненты связности множества $B'_\varepsilon = B_\varepsilon \setminus H$. В силу гиперболичности и изолированности h эти компоненты можно занумеровать от 0 до d так, чтобы при движении вдоль любой достаточно близкой и параллельной γ прямой, номера компонент последовательно возрастали. (Напомним, что d — кратность пересечения H с γ .) Определим в B'_ε функцию $\nu(x)$, сопоставляя произвольной точке x номер содержащей ее компоненты. Рассмотрим произвольную гладкую кривую $\rho: [0, 1] \rightarrow B'_\varepsilon$, такую что $\rho(0)$ и $\rho(1)$ лежат в B'_ε .

Индексом кривой ρ назовем разность $\nu(\rho(1)) - \nu(\rho(0))$. Очевидно, что для кривых общего положения модуль индекса не превосходит числа точек пересечения кривой с H . Заметим, что понятие индекса кривой, аналогичное приведенному, для случая гиперболической гиперповерхности вырожденных квадратичных форм было введено в работе [7].

Согласно лемме П.И.И.И в B_ε можно построить замкнутый выпуклый конус K , содержащий γ и целиком состоящий из времениподобных прямых. Обозначим через K^+ ту из двух компонент связности $K \setminus 0$, которая лежит в компоненте с $\nu = d$. Определим на B_ε поле конусов K_x^+ , полученное параллельным переносом K^+ .

Определение. Гладкую кривую $\rho: [0,1] \rightarrow B_\varepsilon$ назовем положительной, если в произвольной точке $\rho(t)$ касательный вектор к ней лежит в $K_{\rho(t)}^+$.

И.И.З. Лемма. Пусть $h: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ — изолированная гиперболическая особенность. Тогда в достаточно малой окрестности B_ε индекс положительной кривой общего положения относительно ростка $H: \{h=0\}$ равен числу точек пересечения кривой с H .

Доказательство. Достаточно показать, что вдоль любой положительной кривой ρ величина ν не убывает. Пусть для некоторого $t \in [0,1]$ $\rho(t) \in H$, а $\rho'(t)$ — касательный вектор в этой точке. Рассмотрим пучок прямых, параллельных γ и снабженных согласованной с ним ориентацией. В силу положительности кривой ρ , если исходная точка $\rho(t)$ была достаточно близка к 0, то эти прямые являются времениподобными для h . Следовательно, вдоль них функция ν не убывает (так как в противном случае число точек пересечения такой прямой с H превысило бы d , что невозможно). Таким образом, вдоль кривой ρ в окрестности точки $\rho(t)$ функция также не убывает. Лемма доказана.

I.1.4. Следствие. При диффеоморфизме изолированная гиперболическая особенность переходит в гиперболическую. В качестве времениподобной прямой в образе можно взять касательную к образу времениподобной прямой из прообраза.

Доказательство. Рассмотрим образ при диффеоморфизме вектора из K^+ , касательного к γ в O . Построим в новой системе координат пучок прямых, параллельных этому вектору. Нетрудно заметить, что прообразом этого пучка локально является пучок положительных кривых, идущих из компоненты в B'_ε с $\nu=0$ в компоненту с $\nu=d$. Из леммы II.1.1.3 вытекает, что кратность пересечения с H кривых этого пучка равна d , что и требовалось доказать.

I.2. Стабилизация гиперболических особенностей

Рассмотрим теперь пространство \mathcal{O}_n° ростков аналитических функций с нулевой 1-струей. Изучим, какие особенности гиперболических ростков могут встречаться в типичных k -параметрических семействах в \mathcal{O}_n° при росте n . Напомним, что ростки функций разного числа переменных называются стабильно эквивалентными, если после сложения с невырожденными квадратичными формами от дополнительных переменных они переводятся друг в друга диффеоморфизмом (см. [12] стр. 146).

I.2.1. Определение. Назовем особенность $(h \in \mathcal{O}_n^\circ)$, принадлежащую некоторому классу (например, гиперболическую, эллиптическую и т.д.) стабильной в этом классе, если для всех $m > n$ в \mathcal{O}_m° найдется особенность из того же класса, стабильно эквивалентная исходной.

Заметим, что в классах эллиптических или произвольных особенностей стабильными являются все особенности. Для гиперболических особенностей ситуация иная.

1.2.2. Лемма. Пусть $h \in \mathcal{O}_n^\circ$ ($n \geq 2$) — изолированная особенность гиперболического ростка функции, а γ — ее времениподобная прямая. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- а) кратность пересечения ростка $H: \{h=0\}$ с γ равна 2;
- б) 2-струя h отлична от нуля;
- в) h — стабильная особенность гиперболического ростка функции.

Доказательство. Импликация а) \Rightarrow б) очевидна. Установим обратное. Действительно, пусть 2-струя h отлична от нуля, а кратность d пересечения H с γ больше двух. Тогда по лемме П.1.1.1 для любой прямой, проходящей через нуль и достаточно близкой к γ , кратность пересечения ее с H также равна d . Следовательно, h имеет нулевую $(d-1)$ -струю, что противоречит пункту б).

Докажем, что б) влечет в). Без потери общности будем считать, что ограничение ростка h на γ равно $x_1^2 + \dots$. По лемме Морса с параметрами росток h можно привести к виду $x_1^2 + F(x_2, \dots, x_n)$, где h будет гиперболическим относительно оси x_1 . Тогда для любого $m > n$ росток функции $h_m = x_1^2 + F(x_2, \dots, x_n) - \sum_{j=n+1}^m x_j^2$

также будет гиперболическим и стабильно эквивалентен h . Покажем наконец, что из в) следует а). В действительности будет доказано следующее более общее утверждение. Пусть $h \in \mathcal{O}_n^\circ$ — гиперболический росток, имеющий изолированную особенность, для которого кратность d пересечения времениподобной прямой γ с H больше 2. Тогда росток h не может быть стабильно эквивалентен никакому гиперболическому ростку от другого числа переменных. Действительно, пусть $d > 2$, тогда, как показано выше, 2-струя ростка h тождественно равна нулю. Тем самым, h не может быть стабильно эквивалентным ростку функции от меньшего числа переменных. Пусть h

стабильно эквивалентен ростку функции h' от большего числа переменных. Тогда, так как 2-струя h равна нулю, то (согласно предложению 6.5 из [10] имеем, что h' диффеоморфен ростку $h(x_1, \dots, x_n) + Q(y_1, \dots, y_e)$, где Q - невырожденная квадратичная форма (здесь используется комплексная изолированность h). Остается показать в силу следствия II.1.1.4, что никакой росток h' вида $h(x) + Q(y)$ не может быть гиперболическим. Предположим противное. Тогда в силу эквивалентности а) и б) времениподобная прямая не лежит в \mathcal{X} -подпространстве, и ограничение h' на γ равняется αt^2 , где t - подходящий параметр на γ , а $\alpha \neq 0$. Заметим, что изолированный гиперболический росток h функции от 2-х и более переменных обязательно меняет знак в окрестности нуля. Рассмотрим теперь прямую γ' , полученную малым сдвигом прямой γ на такой вектор x_0 , из \mathcal{X} -пространства, что $\alpha h(x_0) > 0$. Тогда ограничение h' на γ' не будет иметь корней в окрестности нуля и, следовательно, h' не может быть гиперболическим ростком. Лемма доказана.

I.3. Перейдем к доказательству теоремы II.1. Легко вычислить, что коразмерность в \mathcal{U}_n^0 множества функций с нулевой 2-струей равна $n(n+1)/2$. Следовательно, при $n(n+1) > 2k$ все встречающиеся в типичных k -параметрических семействах (и, в частности, гиперболические) особенности будут стабильными. Напомним, что это означает, что эквивалентные им особенности будут встречаться в типичных k -параметрических семействах в \mathcal{U}_m^0 при $m > n$. Тем самым, список особенностей гиперболических ростков стабилизируется.

I.3.1. Определение. Пусть $h: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ - гиперболический росток, для которого кратность пересечения с времениподобной прямой равна d . Назовем гиперболическим возмущением h'

такое малое возмущение ростка h , для которого пучок прямых, параллельных времениподобной, пересекает $H' \{h'=0\}$ в окрестности нуля в d точках с учетом кратности.

Очевидно, что гиперболические возмущения заполняют замыкания некоторых компонент дополнения к бифуркационной диаграмме в версальной деформации ростка h (относительно любой из R, RL -или V -эквивалентностей). Замыкание объединения этих компонент назовем областью гиперболичности данной особенности. Аналогично определяется область эллиптичности в дополнении к бифуркационной диаграмме эллиптической особенности.

Так как типичные k -параметрические семейства в U_n^o являются версальными деформациями функций соответствующих особенностей, то список особенностей границ областей гиперболичности также стабилизируется.

1.4. Соотношение с эллиптическими особенностями

Теорема. а) Особенности изолированных стабильных гиперболических ростков функций от n переменных стабильно эквивалентны особенностям эллиптических ростков функций от $n-1$ переменной.

б) Область гиперболичности в миниверсальной деформации стабильного гиперболического ростка функции от n переменных совпадает с областью эллиптичности ростка функции от $n-1$ переменной, стабильно эквивалентного исходному.

Доказательство. Начнем с доказательства пункта а). Рассмотрим стабильную гиперболическую особенность ростка $h \in U_n^o$. В силу леммы II.1.2.2 h приводится к виду $\alpha x_1^2 + F(x_2, \dots, x_n)$, где $\alpha \neq 0$, а ось x_1 является времениподобной. Для того чтобы в пучке прямых, параллельных оси x_1 , кратность пересечения с ростком $H: \{h=0\}$ равнялась двум, необходимо и достаточно, чтобы

$F(x_2, \dots, x_n)$ определял эллиптический росток функции $e: (\mathbb{R}^{n-1}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$, т.е. чтобы F был знакоопределенным вне нуля и имел знак, противоположный знаку α .

Докажем б). Пусть, как и выше, $h \in \mathcal{O}_n^0$ — стабильная гиперболическая особенность, приведенная к виду $\alpha x_1^2 + F(x_2, \dots, x_n)$, где ось x_1 — времениподобная прямая, а $e = F(x_2, \dots, x_n)$ — стабильно эквивалентный h эллиптический росток. Ввиду эквивалентности миниверсальных деформаций выберем деформацию Φ_h ростка h , имеющую следующий вид:

$$\Phi_h(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \alpha x_1^2 + \Phi_e(x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k),$$

где Φ_e — миниверсальная деформация ростка e . Тогда в силу доказанной части а) набор параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ задает гиперболическое возмущение особенности h тогда и только тогда, когда он задает эллиптическое возмущение ростка e . Теорема доказана.

1.4.1. Замечание. Аналогичный результат о совпадении особенностей и областей верен в пространстве \mathcal{O}_n всех ростков аналитических функций. Нормальные формы стабильных эллиптических ростков, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах при $k < 16$ приведены в ([12] стр. 219). В силу теоремы П.1.4, нормальные формы стабильных гиперболических ростков, встречающиеся в семействах с тем же числом параметров, получаются из них дописыванием отрицательного квадрата новой переменной. При $k < 7$ список стабильных гиперболических ростков конечен, а при $k \geq 7$ содержит модули.

§ 2. Теорема версальности в пространстве многочленов и гиперповерхностей

Рассмотрим пространство $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(d, n)$ вещественных проективных алгебраических гиперповерхностей степени d в $\mathbb{R}P^n$ (простран-

ство однородных многочленов от $(n+1)$ переменной, рассматриваемых с точностью до ненулевого множителя). Поверхности, комплексификация которых особа, определяют в \mathcal{Q} алгебраическую гиперповерхность \mathcal{D} , называемую дискриминантом \mathcal{Q} и разбивающую \mathcal{Q} на компоненты связности. Заметим, что поверхности, имеющие особенности в комплексной области, образуют в \mathcal{D} множество коразмерности 1 (см., например, [52]).

Изучение особенностей дискриминанта \mathcal{D} , встречающихся на границе тех или иных компонент связности $\mathcal{Q} \setminus \mathcal{D}$, было начато в [44], где эта задача решалась для эллиптической компоненты, т.е. компоненты гиперповерхностей без вещественных точек. В § П.3 будут рассматриваться особенности, встречающиеся на границе гиперболической компоненты Hyp . Ниже приводится доказательство теоремы П.2.1 о существовании в \mathcal{Q} версальной деформации мультиособенностей с малой суммой чисел Милнора.

2.1. Рассмотрим произвольную алгебраическую гиперповерхность $\Gamma \in \mathcal{Q}$ с изолированной вещественной мультиособенностью. Пусть $\Phi: (\mathbb{R}^k, 0) \rightarrow (\mathcal{Q}, \Gamma)$ — росток семейства гиперповерхностей.

Определение. Росток Φ называется ростком версальной деформации мультиособенности гиперповерхности Γ , если (после некоторого диффеоморфизма) \mathbb{R}^k разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{R}^k = \sum_{i=1}^r \mathbb{R}^{k_i} + \mathbb{R}^{k_0},$$

где r — число особенностей на Γ , а ограничение Φ_i ростка Φ на подпространство \mathbb{R}^{k_i} , $i = \overline{1, r}$, удовлетворяет следующим условиям:

а) поверхности, соответствующие Φ_i , имеют в малых окрестностях всех особенностей поверхности Γ , кроме i -й, особенности, диффеоморфные исходным;

б) Φ_i является ростком версальной деформации i -й особенности гиперповерхности Γ (см. определение I.3.I.2).

Росток Φ версальной деформации с минимальным числом параметров, равным сумме размерностей V -версальных деформаций особенностей Γ , называется ростком миниверсальной деформации.

Теорема (А.Д.Вайнштейн). Пусть Γ — вещественная алгебраическая гиперповерхность степени d с r вещественными особыми точками и не имеющая комплексных особых точек, μ_r — сумма чисел Милнора всех особых точек, причем $d > \mu_r + 3r - 4$. Тогда малая окрестность V_r поверхности Γ в \mathbb{Q} является ростком версальной деформации мультиособенности Γ .

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда на Γ есть единственная особенность \mathcal{S} в точке x_0 . Выберем аффинную систему координат в $\mathbb{R}P^n$, поместив начало координат в точку x_0 . Тогда существует мономиальный базис q_1, \dots, q_μ версальной деформации особенности \mathcal{S} многочлена p , задающего Γ в нуле, такой, что степени всех мономов q_i не превосходят $\mu - 1$ (см. [12] стр. 95). Рассмотрим росток функции $\Phi(x, \lambda) = p + \sum_i \lambda_i q_i$. Очевидно, что Φ — росток версальной деформации ростка гиперповерхности Γ (возможные неприятности на бесконечности устраняются правильным выбором бесконечно удаленной плоскости). Так как при $d > \mu - 1$ росток Φ содержится в V_r , то V_r также является R -, а следовательно и V -версальной деформацией.

Пусть теперь Γ имеет r вещественных особых точек с числами Милнора μ_1, \dots, μ_r , $\mu_r = \sum_{i=1}^r \mu_i$. Поместим все эти точки в одну аффинную карту. Зафиксируем в карте координаты x_1, \dots, x_n . Как и выше, для каждой особой точки $\mathcal{S}_i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$ существует мономиальный относительно $(x_i - x_i^i)$ базис $q_1^i, \dots, q_{\mu_i}^i$. R -вер-

сальной деформации особенности S_i , такой что степени всех мономов не превосходят $\mu_i - 1$. Определим для всех $i = \overline{1, r}$ следующие многочлены:

$$Q_i(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_1^i)^{\bar{\mu}_i} + \dots + (x_n - x_n^i)^{\bar{\mu}_i},$$

где $\bar{\mu}_i$ - наименьшее четное число $\geq \mu_i + 1$. Рассмотрим росток деформации $\Phi: (\mathbb{R}^{M_r}, 0) \rightarrow (\underline{0}, \Gamma)$, задаваемый формулой

$$\Phi(x, \lambda) = p + \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{\bar{\mu}_i} \lambda_{ij} q_j^i \bar{Q}_i = 0,$$

где $\bar{Q}_i = \prod_{l \neq i} Q_l$, $i = \overline{1, r}$.

Заметим, что \bar{Q}_i - положителен во всех точках, кроме S_k , $k \neq i$, где он обращается в нуль с порядком $\bar{\mu}_k$. Следовательно, многочлены $q_j^i \bar{Q}_i$ также образуют базис \mathbb{R} -версальной деформации особенности S_i . У произвольной гиперповерхности Γ' из Φ_i достаточная $(\mu_k + 1)$ -струя во всех особых точках S_k , кроме i -й, такая же, как у Γ . Следовательно, Φ - росток версальной деформации мультиособенности поверхности Γ .

Оценим степень многочленов $q_j^i \bar{Q}_i$:

$$\deg q_j^i \bar{Q}_i \leq \mu_i - 1 + \sum_{j \neq i} \bar{\mu}_j \leq \mu_i - 1 + \sum_{j \neq i} \mu_j + 3 = \mu_r + 3r - 4.$$

Таким образом, при $d > \mu_r + 3r - 4$ Φ содержится в V_r , следовательно, V_r - росток версальной деформации мультиособенности. Теорема доказана.

2.1.1. Следствие. Пусть $\Gamma \in \mathcal{D}$ - гиперповерхность, удовлетворяющая условиям теоремы П.2.1. Тогда локально окрестность $V_r \subset \mathcal{D}$ диффеоморфна цилиндру над прямым произведением дополнений к

росткам бифуркационных диаграмм в версальных деформациях всех особенностей поверхности Γ .

Сформулированное следствие позволяет сводить задачу изучения $B_r \cap D$ в окрестности особых гиперповерхностей, удовлетворяющих условиям теоремы II.2.I, к задаче изучения бифуркационных диаграмм особенностей поверхности Γ (\mathcal{N} -версальных деформаций особенностей многочлена p с нулевым критическим значением).

§ 3. Стабилизация особенностей гиперболических гиперповерхностей. Теорема о реализации

3.1. Локальная гиперболичность особенностей гиперболических гиперповерхностей

В этом параграфе изучаются особенности, возникающие на гиперболических поверхностях. Докажем сначала следующее простое утверждение.

Предложение. Росток многочлена, задающего гиперболическую гиперповерхность $H: \{p=0\}$, является гиперболическим в смысле определения I.I.5.I в окрестности любой особой точки $S \in H$. Времениподобной прямой является прямая, соединяющая точку S с времениподобной точкой ξ .

Доказательство. Общая вещественная кратность пересечения H с любой из пучка прямых, проходящих через точку ξ , равна степени многочлена p . Поэтому кратность пересечения ростка H в окрестности точки S с рассматриваемым пучком также постоянна, так как при шевелении прямой все корни ограничения p остаются вещественными. Выберем в проективном пространстве аффинную карту, в которой точка ξ лежит на бесконечно удаленной гиперплоскости. В этой карте рассматриваемый пучок прямых превращается

в пучок параллельных прямых, что и доказывает гиперболичность ростка.

3.2. Теорема о реализации

Предложение П.3.1 допускает следующее обращение.

Теорема. Любой аналитический гиперболический росток гиперповерхности $H: \{h=0\}$ с изолированной особенностью может быть реализован с точностью до диффеоморфизма в качестве единственной особой точки гиперболической гиперповерхности достаточно высокой степени.

Доказательство. Сначала построим серию примеров сколь угодно вырожденных особенностей гиперболических гиперповерхностей с нулевыми струями сколь угодно больших порядков. Начнем со следующей конструкции. Пусть p_ℓ — многочлен степени 2ℓ , задаваемый соотношением

$$p_\ell(x) = \prod_{i=1}^{\ell} (x^2 - a_i^2), \quad (5)$$

где $a_i \neq 0$, $i = \overline{1, \ell}$, выбраны так, чтобы все локальные минимумы четного многочлена p_ℓ на положительной полуоси были различными. Обозначим через a_{\min} глобальный минимум многочлена p_ℓ , а через x_{\min} — соответствующую точку оси x . Определим семейство многочленов от 2-х переменных:

$$Q_{\ell, m}(x_1, x_2, \varepsilon) = \prod_{i=1}^{\ell} (x_1^2 + x_2^2 - a_i^2) - \varepsilon x_2^{2(m+1)} - a_{\min}. \quad (6)$$

Кривая, задаваемая соотношением ($Q_{\ell, m} = 0$), при всех достаточно малых ε и $d > m+1$ является гиперболической (см. рис. 2). Она имеет в точках $(x_{\min}, 0)$ и $(-x_{\min}, 0)$ ветви, касающиеся с порядком m . Если выполнено неравенство $2\ell + 2 > 7m$, то рассматриваемая кривая удовлетворяет условиям теоремы П.2.1. Следовательно, существует малое возмущение многочлена $Q_{\ell, m}$ в клас-

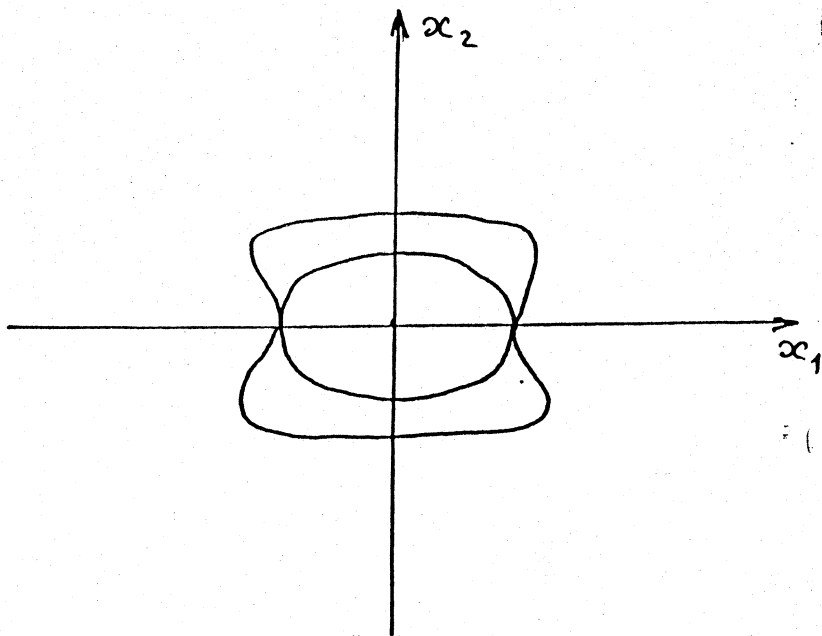


Рис. 2. Пример нестрого гиперболической кривой

се многочленов степени $2\ell_m$, не меняющее (с точностью до диффеоморфизма) особенность в точке $(x_{\min}, 0)$ и произвольно разрешающее особенность в точке $(-x_{\min}, 0)$. В частности, существует малое возмущение, при котором возмущенная гиперповерхность будет гиперболической и имеющей в точке $(x_{\min}, 0)$ единственную особую точку, в которой две ветви касаются с порядком m . Заменяя в формуле (6) x_2^2 на $\sum_{i=2}^n x_i^2$, а $x_2^{2(m+1)}$ на $\sum_{i=2}^n x_i^{2(m+1)}$,

получим аналогичную многомерную конструкцию. В рассмотренном примере реализована сколь угодно вырожденная гиперболическая особенность, для которой кратность пересечения с времениподобной прямой равна двум. Построим, начиная, как и выше, двумерным случаем, примеры с произвольной четной кратностью $2d$. Рассмотрим d многочленов $p_{e,i}$ вида (5) с общим глобальным минимумом a_{\min} и критической точкой x_{\min} (все остальные критические точки и значения на положительной полуоси должны быть различными). Построим по каждому из $p_{e,i}$ многочлены $Q_{e,i,m}$ вида (6) и возьмем их произведение

$$Q = \prod_{i=1}^d Q_{e,i,m}.$$

Многочлен Q имеет степень $2\ell d$. Задаваемая им кривая имеет две особые точки $(x_{\min}, 0)$ и $(-x_{\min}, 0)$. Через каждую из них проходят d пар ветвей (по паре от каждого многочлена $Q_{\ell, i, m}$), причем легко убедиться, что две ветви одного многочлена касаются с порядком m , а две любые ветви разных многочленов касаются с порядком $2m+1$. Локально в окрестности точки $(x_{\min}, 0)$ росток многочлена Q эквивалентен (переводится диффеоморфизмом) многочлену

$$\bar{Q}(x_1, x_2) = \prod_{i=1}^d ((x_1^2 - x_2^{2(m+1)}) + R_i(x_2)), \quad (7)$$

где R_i — многочлен степени $\geq 2(m+1)$. Если ℓ, d и m таковы, что выполняется теорема П.2.1, (а этого всегда можно добиться, увеличивая d), то мы можем, как и выше, избавиться от одной из особенностей, сохранив (с точностью до диффеоморфизма) другую. Заменяя, как и выше, в формуле (6) x_2^2 на $\sum_{i=2}^n x_i^2$ и $x_2^{2(m+1)}$ на $\sum_{i=2}^n x_i^{2(m+1)}$ и далее действуя аналогично, получим серию гиперболических поверхностей со сколь угодно вырожденной особенностью и кратностью $2d$, ростки многочленов которых эквивалентны:

$$\bar{Q}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^d (x_1^2 - \sum_{i=2}^n x_i^2 + R_i(x_2, \dots, x_n)) \quad (8)$$

Опишем теперь процедуру реализации (с точностью до диффеоморфизма) произвольного гиперболического ростка гиперповерхности с помощью возмущения примеров полученной серии. Пусть $H: \{h=0\}$ — аналитический гиперболический росток гиперповерхности с конечным числом Милнора μ_H . Возьмем ту из построенных гиперповерхностей, для которой росток задающего многочлена в

окрестности особой точки имеет нулевую $(\mu_n + 1)$ -струю. Очевидно, что рассматриваемая особенность примыкает к выбранной. Доказательство теоремы П.3.2 завершает следующая лемма.

3.2.1. Лемма. Пусть Γ — нестрогая гиперболическая гиперповерхность из \underline{Q} . Предположим, что Γ удовлетворяет условиям теоремы П.2.1 и имеет единственную особую точку S . Пусть $\Gamma' \in \underline{Q}$ ее малое возмущение, такое что Γ' имеет в окрестности S гиперболическую особую точку S' . Тогда Γ' нестрогая гиперболическа.

Доказательство. Согласно теореме П.2.1 малая окрестность B_Γ является версальной деформацией особенности S . Особенность S' поверхности Γ' примыкает к особенности S и лежит в ее области гиперболичности. Соединим Γ и Γ' коротким путем $\Gamma(t)$ в B_Γ по области гиперболичности особенности S . Покажем, что все $\Gamma(t)$ гиперболичны относительно ξ , где ξ — времениподобная точка для Γ . Действительно, при изменении t кратность пересечения поверхности $\Gamma(t)$ с любой из прямых, проходящих через точку ξ , может измениться только вблизи точки x . По предположению все $\Gamma(t)$ имеют в окрестности x гиперболические особенности, т.е. локальные кратности пересечения в окрестности точки x не меняются, а значит все $\Gamma(t)$ гиперболичны.

3.3. Стабилизация особенностей поверхностей

Перейдем к изучению стабилизации особенностей, встречающихся на гиперболических гиперповерхностях. Строго гиперболические гиперповерхности заполняют в пространстве $\underline{Q} = \underline{Q}(d, n)$ всех гиперповерхностей данной степени одну из компонент дополнения к дискриминанту D (см. § П.2 и [83]), которая обозначается $Hyp = Hyp(d, n)$. Мы будем изучать замыкание \overline{Hyp} области Hyp , а также Hyp_0 (замыкание области Hyp_0 строго гиперболических

гиперповерхностей, имеющих фиксированную времениподобную точку).

3.3.1. Лемма (см. [83]). Все нестрогие гиперболические гиперповерхности лежат в $\overline{Нур}$.

Заметим, что кроме них в $\overline{Нур}$ лежат гиперповерхности, полученные в пределе при сжатии внутреннего овалоида гиперболической поверхности в точку, но мы их не рассматриваем.

Доказательство. Пусть $p(x_0, \dots, x_n)$ — однородный многочлен, задающий рассматриваемую нестрогую гиперболическую гиперповерхность, а ξ — времениподобная точка этой поверхности. Выберем в $\mathbb{R}P^n$ аффинную карту, в которой ξ является началом системы координат (x_1, \dots, x_n) . Пусть $\bar{p}(x_1, \dots, x_n)$ — неоднородная запись многочлена p в этой карте. Следуя [83], введем операторы T_{ε, x_i} , $i = \overline{1, n}$, действующие на пространстве однородных многочленов от $n+1$ переменных. В рассматриваемой карте их действие имеет вид

$$T_{\varepsilon, x_i}(\bar{p}) = \bar{p} + \varepsilon x_i \left(\bar{p} d - \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \right). \quad (9)$$

В [83] показано, что при любом вещественном $\varepsilon \neq 0$ оператор $T_{\varepsilon} = \prod_{i=1}^n T_{\varepsilon, x_i}$ понижает кратность пересечения в пучке прямых, проходящих через времениподобную точку 0, для всех особых точек рассматриваемой гиперболической гиперповерхности. Доказательство вытекает из того, что многочлен от одной переменной $q_{\varepsilon}(x) = q(x) - \varepsilon q'(x)$ имеет при малых ε столько же вещественных корней, сколько и q , и кратности всех его кратных корней меньше чем у q . Тем самым, применив T_{ε} к p достаточное число раз, получим строго гиперболический многочлен (гиперповерхность) той же степени. Так как ε при этом можно брать сколь угодно малым, то исходная гиперповерхность лежит в $\overline{Нур}$.

3.4. Стабилизация списков (мульти-) особенностей

Теорема. Список мультиособенностей гиперболических гиперпо-

верхностей, встречающихся в типичных k -параметрических семействах в $\text{Нур}_0(d, n)$ стабилизируются при $d > d_0$ и $n > n_0$, где d_0 и n_0 зависят только от k .

Доказательство. Заметим, что на границе области Нур дополнение к множеству нестрогих гиперболических гиперповерхностей имеет коразмерность $\geq n$, так как оно состоит из гиперповерхностей, задаваемых многочленами с нулевой 1-струей. Далее, из доказанных теорем следует, что при $n(n+1)/2 + 1 > k$ и достаточно большой степени d мультиособенности гиперболических гиперповерхностей, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах будут состоять только из стабильных гиперболических особенностей (т.е. имеющих ненулевую 2-струю), для которых

$$\sum_i (\mu_i - m_i) \leq k, \text{ где } \mu_i - \text{числа Милнора особенностей, а } m_i - \text{их}$$

модальность.* Осталось показать, что для любой мультиособенности, состоящей из стабильных гиперболических особенностей, при всех достаточно больших d и n в $\text{Нур}_0(d, n)$ найдется гиперповерхность со стабильно эквивалентной ей мультиособенностью.

Действительно, в силу теоремы П.3.2 любая стабильная особенность гиперболического ростка гиперповерхности может быть реализована как единственная особая точка гиперболической гиперповерхности достаточно высокой степени. Более того, такая гиперповерхность, как видно из приводимых в доказательстве формул, может быть целиком помещена в аффинную карту. Поскольку для гиперболических гиперповерхностей множество времениподобных точек является объединением открытых выпуклых множеств, то можно последовательно вкладывать друг в друга гиперповерхности, реализующие каждую из особенностей и реализовать искомую мульти-

*Определение модальности см. ([12], стр. 143).

особенность. Получившаяся гиперповерхность помещается в аффинную карту и, добавляя к ней конфигурации из вложенных сфер, можно сделать степень реализующей гиперповерхности сколь угодно большой. Таким образом, список мультиособенностей, состоящих из стабильных особенностей, встречающихся в типичных семействах гиперповерхностей в $\overline{Hyp}_0(d, n)$ не уменьшается с ростом d и n . Теорема доказана.

Аналогичными рассуждениями можно доказать следующее утверждение.

3.4.1. Теорема. Список мультиособенностей нестрого гиперболических гиперповерхностей, встречающихся в типичных k -параметрических семействах в $\overline{Hyp}(d, n)$, стабилизируется с ростом d при любом фиксированном n .

Докажем утверждение о стабилизации особенностей границы областей гиперболичности.

3.4.2. Теорема. Список особенностей границы областей гиперболичности, встречающихся в типичных k -параметрических семействах в \overline{Hyp}_0 , стабилизируется при достаточно больших d и n и совпадает со стабильным списком особенностей границы множества эллиптических многочленов.

Доказательство. Стабилизация списка особенностей границы вытекает из теоремы П.3.4 и следствия П.2.1.1, а его совпадение со стабильным списком особенностей границы эллиптичности — из теоремы П.1.4, предложения П.3.1 и следствия П.2.1.1.

Приведем, в заключение, список особенностей и мультиособенностей, встречающихся в \overline{Hyp}_0 при $k \leq 3$.

Напомним, что в стабильной ситуации в k -параметрических семействах могут встречать мультиособенности, для которых

$$\sum_i (\mu_i - m_i) \leq k, \text{ где } \mu_i - \text{числа Милнора, а } m_i - \text{модальности}$$

Таблица I

Список мультиособенностей гиперболических гиперповерхностей

при $k \leq 3$.

Число параметров	Мульти-особенность	Пример реализации	Кривая	Росток границы
I	A_1	$x_1^2 - r^2 = 0$	Рис. 3а	Рис. 4а
2	(A_1^-, A_1^-)	$((x_1^2 - x_1 + r^2) - r^2/2) \times$ $\times ((x_1 - 10)^2 - r^2) = 0$	Рис. 3б	Рис. 4б
3	A_3^- (A_1^-, A_1^-, A_1^-)	$(x_1^2 + r^2 - 1) \times$ $((x_1 + 1)^2 + r^2 - 4) = 0$	Рис. 3в	Рис. 4в
		$((x_1 + 100)^2 - r^2) \times$ $((x_1^2 - 10x_1 + r^2) -$ $- 50(x_1^2 + r^2)) \times$ $((x_1 - \frac{1}{2})^2 - (x_1 - \frac{1}{2}) + r^2)^2$ $- \frac{1}{2}((x_1 - \frac{1}{2})^2 + r^2) = 0$		

входящих особенностей. Так как модальность особенностей с числом Милнора ≤ 6 равна нулю, и для них $\sqrt{}$ -версальность совпадает с \mathcal{R} -версальностью (см. [12]), то для получения списка мультиособенностей следует отобрать стабильные гиперболические особенности с $\mu \leq 3$. После чего легко строятся простые примеры реализации соответствующих мультиособенностей. Ростки областей гиперболичности получаются на основе следствия П.2.1.1. Определение расположения области гиперболичности относительно дискриминанта содержательно только в случае особенности A_3^- . Для него ответ вытекает из теоремы П.1.4.

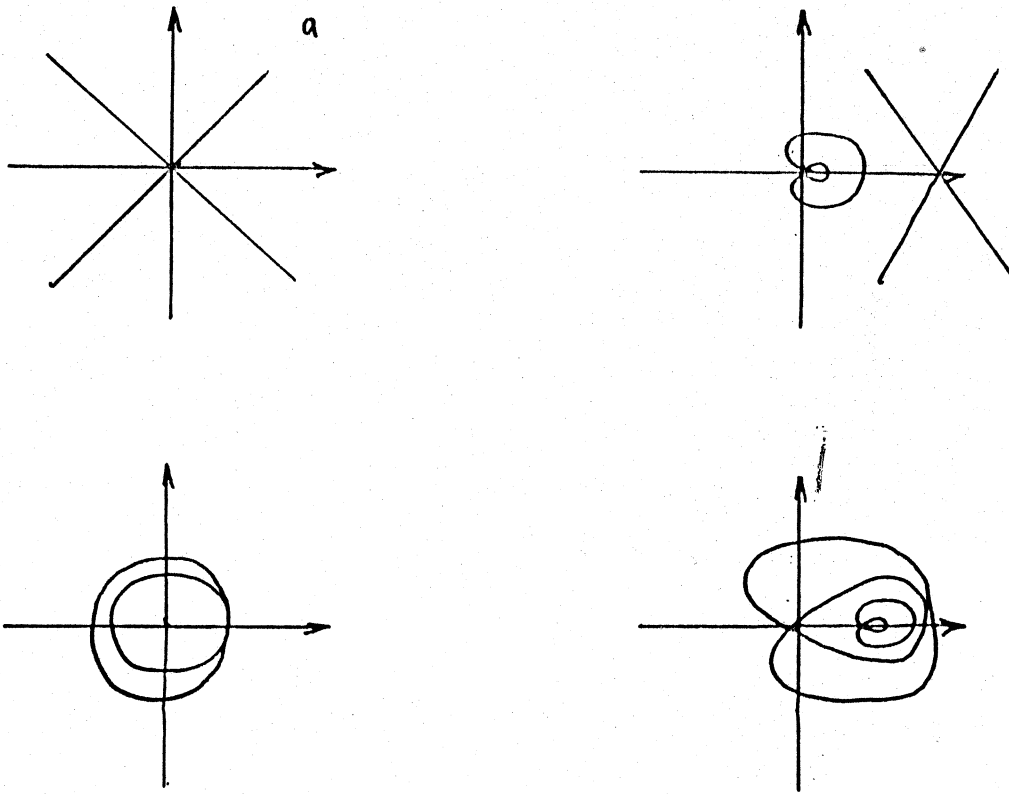


Рис.3. Гиперболические кривые, реализующие мультиособенности

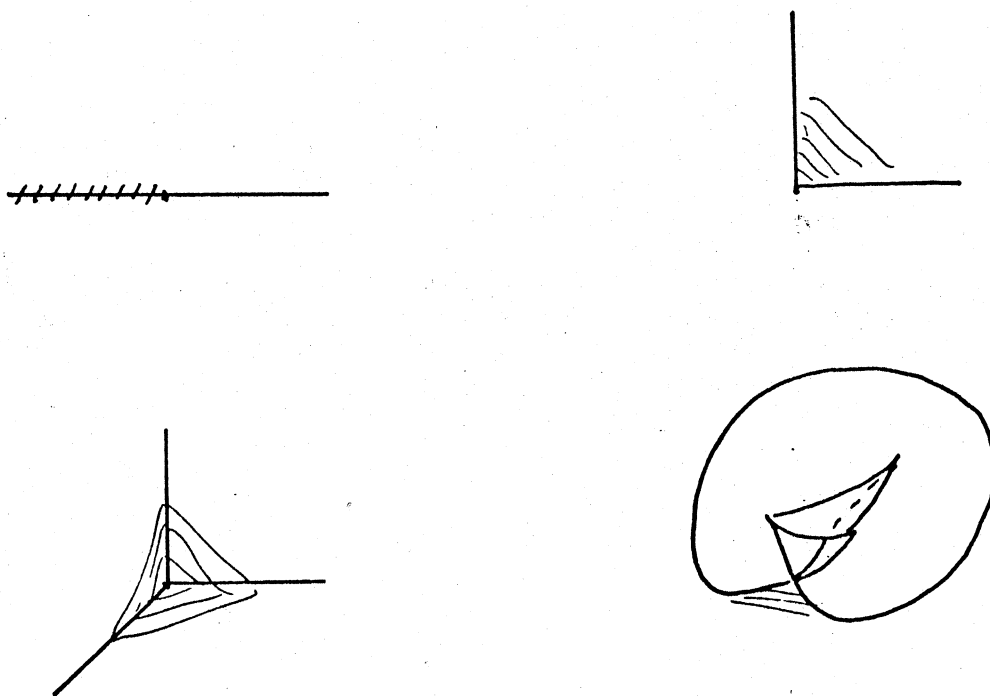


Рис.4. Ростки области гиперболичности (заштриховано)

§ 4. Стабилизация особенностей гиперболических ростков матриц

В этом параграфе будет доказан следующий результат о стабилизации для матричных ростков.

Теорема. Бифуркационные диаграммы версальных деформаций и области гиперболическости ростков (симметрических) матриц

$f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\text{Mat}_N, \Delta_N)$ или $f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\text{Symat}_N, S\Delta_N)$, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах, стабилизируются с ростом N . Для Mat_N стабилизация наступает при выполнении неравенства

$$N^2 > k + 2l,$$

а для Symat_N - при выполнении неравенства

$$N(N-1)/2 > k + 2l.$$

Доказательство опирается на ряд лемм.

4.1. Трансверсаль к орбитам групп \mathcal{O}_c и K_c .

4.1.1. Лемма. Пусть $f: X = (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow Y = (\mathbb{R}^n, c)$ - росток отображения, тогда:

а) трансверсаль к орбите $\mathcal{O}_c f$ отображения f под действием группы \mathcal{O}_c право-левых замен, сохраняющих c , отождествляется с факторпространством

$$\Phi(x, \lambda) = \mathcal{O}_x^Y / \left\{ \mathcal{O}_x \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_l} \right) + \mathcal{O}_{f(x)}(v_1 \circ f, \dots, v_r \circ f) \right\} \quad (10)$$

где \mathcal{O}_x^Y - пространство всех ростков отображения из X в Y , \mathcal{O}_x - пространство ростков функций на X , $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ - базис образующих модуля векторных полей в образе, индуцированных группой замен в прообразе, $\mathcal{O}_{f(x)}$ - пространство функций на Y , ограниченных на образ $f(x)$, $v_i, i = \overline{1, r}$ - базис \mathcal{O}_Y -модуля векторных полей, касающихся стратифицированного многообразия C , $v_i \circ f$ -

ограничение векторного поля v_i на образ ростка f ;

б) трансверсаль к орбите $K_c f$ прообраза стратифицированного многообразия S под действием \mathcal{M}_c отождествляется с факторпространством

$$\bar{\Phi}(x, \lambda) = \mathcal{O}_x^y / \left\{ \mathcal{O}_x \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_\ell}, v_1 \circ f, \dots, v_r \circ f \right) \right\}. \quad (\text{II})$$

Доказательство этих утверждений приведено в работах [63, 67]. Оно полностью аналогично утверждениям об R -, RL -, V -версальности (см. [12] стр. II5). В знаменателях формул (I0) и (II) написаны касательные пространства к соответствующим орбитам.

4.2. Свойства стабильных матричных ростков

4.2.1. Лемма. При $N^2 \geq k + \ell$ ростки матриц $f: (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow \text{Mat}_N$, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах, являются гладкими (т.е. ранг отображения f максимален).

Доказательство. Для того чтобы росток матрицы f не был гладким, необходимо, чтобы ранг дифференциала отображения в нуле был меньше ℓ (считаем, что $N^2 \leq \ell$). Нетрудно заметить, что ко-размерность множества отображений, имеющих в нуле неполный ранг, такая же, как и размерность множества матриц неполного ранга в пространстве матриц размера $\ell \times N^2$. Согласно формуле произведения корангов (см. [12], стр. 23) эта ко-размерность равна $N^2 - \ell$. Следовательно, при $k + \ell < N^2$ в типичных k -параметрических семействах ростков отображений $(\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow \text{Mat}_N$ встречаются только гладкие ростки.

Замечание. Аналогичное утверждение верно и для квадратичных форм при выполнении неравенства $N(N+1)/2 > k + \ell$.

Рассмотрим стратификацию пространства Mat_N всех матриц по рангам (т.е. на орбиты левого умножения группой GL_N).

4.2.2. Лемма. Корамерность стратов St_r , состоящих из матриц коранга $r \leq N$, равна r^2 . Трансверсаль к St_r отождествляется с пространством Mat_r .

Доказательство первой части следует из формулы произведения корангов, а второй части — из простых вычислений в окрестности матрицы $E_{n,n-r} = \begin{pmatrix} E_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Действительно, действие группы

GL_N на Mat_N "уважает" изучаемую стратификацию. Умножив любую матрицу g из St_r на подходящую матрицу из GL_N , можно считать, что $g = E_{n,n-r}$. Касательное пространство T к St_r в точке $E_{n,n-r}$ совпадает со множеством матриц, строки и столбцы которых являются произвольными линейными комбинациями строк и столбцов матрицы $E_{n,n-r}$, соответственно. Очевидно, тем самым, что T отождествляется с множеством матриц, у которых равен нулю нижний правый $r \times r$ -блок рассматриваемого блочного разложения. Следовательно, подпространство, являющееся дополнением к T , отождествляется со множеством всех $r \times r$ -матриц этого блока.

4.2.3. Лемма. Образы ростков матриц $f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow Mat_N$, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах при $r^2 > k+l$, не пересекаются со стратами St_r .

Доказательство. Действительно, расширенное отображение $\Phi: \mathbb{R}^l \times (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \rightarrow Mat_N$ является типичным $(k+l)$ -параметрическим семейством матриц. Следовательно, так как корамерность страта St_r равна r^2 , то при $r^2 > k+l$ образ отображения не пересекается с St_r .

4.3. Стабилизирующие переменные для Ω_c - и K_c -орбит

Пусть $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N_1} + \mathbb{R}^{N_2}$ (в \mathbb{R}^{N_1} заданы координаты Y , а в \mathbb{R}^{N_2}

$-Z$), $C \subset \mathbb{R}^N$ — поверхность, цилиндрическая по переменным Y (т.е. они не входят в уравнение, задающее множество C), $f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, C)$ — гладкий росток отображения ($l < N$). Обозначим через L_Y и L_Z пересечения с \mathbb{R}^{N_1} и \mathbb{R}^{N_2} касательного пространства L к образу $f(\mathbb{R}^l)$ в нуле, соответственно. Обозначим через π_Z проекцию \mathbb{R}^N на \mathbb{R}^{N_2} , а через π_{YZ} проекцию \mathbb{R}^N на $L_Y + \mathbb{R}^{N_2}$.

4.3.1. Лемма. 1) Версальная деформация $\Phi(x, \lambda)$ гладкого ростка $f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^N, C)$ совпадает с версальной деформацией $\Phi_{\pi_{YZ}}$ гладкого ростка $\pi_{YZ} f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\pi_{YZ} \mathbb{R}^N, \pi_{YZ} C)$.

2) Версальная деформация $\bar{\Phi}(x, \lambda)$ прообраза $f^{-1}(C)$ совпадает с версальной деформацией $\bar{\Phi}_{\pi_Z}(x, \lambda)$ прообраза $\pi_Z f^{-1}(C)$ для отображения $\pi_Z f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\pi_Z \mathbb{R}^N, \pi_Z C)$.

Доказательство. Разложим пространство \mathbb{R}^N в прямую сумму $L_Y + L_Y^\perp + \mathbb{R}^{N_2}$, где $L_Y + L_Y^\perp = \mathbb{R}^{N_1}$ и обозначим соответствующие группы координат через (Y_1, Y_2, Z) , а размерности пространства L_Y и L_Y^\perp через k_1 и k_2 соответственно. Выберем в модуле векторных полей, сохраняющих C , систему образующих со следующими свойствами. Так как C цилиндрично по \mathbb{R}^{N_1} , то выберем поля u_1, \dots, u_r не зависящими от переменных Y , и добавим к ним поля $v_i = \partial / \partial y_i^1$, $i = \overline{1, k_1}$, $w_j = \partial / \partial y_j^2$, $j = \overline{1, k_2}$. Согласно формуле (II) касательное пространство к орбите $K_C f$ есть \mathcal{O}_x -модуль векторных полей с базисом $(\partial f / \partial x_i)_{i = \overline{1, l}}$, $(u_i \circ f)$, $i = \overline{1, r}$, (v_i) , $i = \overline{1, k_1}$, (w_i) , $i = \overline{1, k_2}$. После простых линейных преобразований перейдем от указанного базиса к базису $(\frac{\partial \pi_Z f}{\partial x_i})$, $i = \overline{1, l}$, $(u_i \circ \pi_Z f)$, $i = \overline{1, r}$, u_i , w_i . Факторпространство $\bar{\Phi} = \mathcal{O}_x^{Y+Z} / \mathcal{O}_x(\frac{\partial \pi_Z f}{\partial x_i}, u_i \circ \pi_Z f, v_i, w_i)$ совпадает с факторпространством $\bar{\Phi}_{\pi_Z} = \mathcal{O}_x^Z / \mathcal{O}_x(\frac{\partial \pi_Z f}{\partial x_i}, u_i \circ \pi_Z f)$. Далее, согласно формуле (10)

касательное пространство к орбите $\mathcal{O}_c f$ есть прямая сумма \mathcal{O}_x -модуля векторных полей с базисом $(\partial f / \partial x_i), i = \overline{1, \ell}$, и $\mathcal{O}_{f(x)}$ -модуля с базисом $u_i \circ f, v_i, w_i$. Так как образ отображения f гладкий, то $\mathcal{O}_{f(x)}$ совпадает с \mathcal{O}_x , и указанная сумма модуля совпадает с суммой \mathcal{O}_x -модуля с образующими $(\frac{\partial \pi_{\gamma_2} f}{\partial x_i})$ и $\mathcal{O}_{f(x)}$ -модуля с образующими $u_i \circ \pi_{\gamma_2} f, v_i, w_i$. Так как проектирование π_{γ_2} на подпространство $L_\gamma + \mathbb{R}^{N_2}$ является диффеоморфизмом $f(x)$ и $\pi_{\gamma_2} f(x)$, то $\mathcal{O}_{f(x)} = \mathcal{O}_{\pi_{\gamma_2} f(x)}$, и факторпространство

$$\Phi(x, \lambda) = \mathcal{O}_x^{y_1 + y_2 + z} / \left\{ \mathcal{O}_x \left(\frac{\partial \pi_{\gamma_2} f}{\partial x_i} \right) + \mathcal{O}_{f(x)} (u_i \circ \pi_{\gamma_2} f, v_i, w_i) \right\}$$

совпадает с $\Phi_{\pi_{\gamma_2}}(x, \lambda) = \mathcal{O}_x^{y_1 + z} / \left\{ \mathcal{O}_x \left(\frac{\partial \pi_{\gamma_2} f}{\partial x_i} \right) + \mathcal{O}_{\pi_{\gamma_2} f(x)} (u_i \circ \pi_{\gamma_2} f, v_i) \right\}$.

Лемма доказана.

4.3.2. Следствие. Версальная деформация орбиты $K_c f$, где f - росток кривой, имеющей конечную кратность пересечения с ростком гладкой гиперповерхности, эквивалентна версальной деформации особенности A_k .

Вернемся к доказательству теоремы II.4.

Согласно приведенной лемме ростки $f: (\mathbb{R}^\ell, 0) \rightarrow \text{Mat}_N$, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах, не пересекаются при $r^2 \geq k + \ell$ со стратами St_r , и размерность пересечения касательного пространства к образу ростка с касательным пространством к страту St_r в точке пересечения не превосходит ℓ . Следовательно, как только размерность стратов St_r , удовлетворяющих условию $r^2 < k + \ell$, превысит ℓ , то в силу леммы II.4.3.I списки версальных деформаций и бифуркационных диаграмм стабилизируются. Осталось выяснить, когда выполняются эти неравенства в пространствах Mat_N и $S\text{Mat}_N$. Размерность страта St_r равна $(N^2 - r^2)$ для Mat_N и $N(N-1)/2 - r(r-1)/2$ для $S\text{Mat}_N$. Получаем для Mat_N и $S\text{Mat}_N$ следующие системы неравенств

$$\begin{cases} r^2 < k+l \\ N^2 - r^2 > l \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} r(r+1)/2 < k+l \\ N(N-1)/2 - r(r-1)/2 > l \end{cases} .$$

Первая из них эквивалентна неравенству $N^2 > k + 2l$ (при $k, l > 0$) а вторая - неравенству $N(N-1)/2 > k + 2l$ ($k, l > 0$). Теорема доказана.

Замечание. Из стабилизации версальных деформаций и того, что области гиперболичности являются объединением некоторых компонент дополнения к бифуркационным диаграммам, следует стабилизация областей гиперболичности.

4.3.3. Особенности матричных многочленов $p_d : (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow \text{Mat}_N$ степени d , встречающиеся в типичных k -параметрических семействах, стабилизируются при $d \geq k+2$.

Доказательство проведем для случая группы K_c (случай \mathcal{O}_c рассматривается аналогично). Рассмотрим вместо однородного матричного многочлена p_d неоднородный матричный многочлен $\bar{p}_d : \mathbb{R}^{l-1} \rightarrow \text{Mat}_N \cong \mathcal{O}_x^{n^2}$. Касательное пространство T к орбите $K_c \bar{p}_d$ является \mathcal{O}_x -модулем. Согласно результатам Дамона [68] все члены, лежащие в нильпотентной подалгебре алгебры K_c , (т.е. в $m_x^2 T$, где m_x - максимальный идеал в \mathcal{O}_x) могут быть уничтожены заменами. Пусть $\dim_c \text{Mat}_N / T = k$, тогда $T \supset m_x^{k+1} \text{Mat}_N$. Следовательно, $m_x^2 T \supset m_x^{k+3} \text{Mat}_N$, что и означает, что от членов степени $\geq k+3$ можно избавиться.

§ 5. Простейшие особенности ростков матриц

5.1. Регулярный случай

5.1.1. Замечание (Б.А.Хесин). Версальная деформация и бифуркационная диаграмма регулярного ростка отображения $f : (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, c)$ (см. определение 1.3.2.3) совпадают с \mathbb{V} -версальной деформацией и бифуркационной диаграммой следующего отображения f_c . Пусть h_1, \dots, h_k - ростки функций такие, что система

уравнений $\{h_i = 0\}$ задает гладкий росток C как полное пересечение ($k = \text{codim } C$). Тогда $f_c: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$ является ограничением функций h_1, \dots, h_k на образ $f(\mathbb{R}^l)$.

Более точная формулировка такова. Пусть $f: (\mathbb{R}^l, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k})$ - росток регулярного отображения (в регулярном случае C можно всегда заменить на \mathbb{R}^{n-k}). Обозначим через Φ_f - трансверсаль к орбите $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{n-k}} f$, через $\bar{\Phi}_f$ - трансверсаль к орбите $K_{\mathbb{R}^{n-k}} f$, а через $\bar{\Phi}_{\pi f}$ - трансверсаль к орбите $K \pi f$, где π - проектирование \mathbb{R}^n вдоль \mathbb{R}^{n-k} на \mathbb{R}^k . Φ_f , $\bar{\Phi}_f$ и $\bar{\Phi}_{\pi f}$ являются версальными деформациями отображений f и πf относительно соответствующих групп диффеоморфизмов ($\mathcal{O}_{\mathbb{R}^{n-k}}$, $K_{\mathbb{R}^{n-k}}$ и K соответственно). Тогда $\Phi_f \simeq \bar{\Phi}_f = \bar{\Phi}_{\pi f}$, где \simeq означает эквивалентность версальных деформаций*, т.е. индуцируемость их друг из друга.

Доказательство. Эквивалентность Φ_f и $\bar{\Phi}_f$ непосредственно вытекает из формул (I0), (II) и гладкости образа f . Установим эквивалентность $\bar{\Phi}_f$ и $\bar{\Phi}_{\pi f}$. Две деформации эквивалентны, если каждая из них индуцируется из другой. Заметим, что любое отображение из $\bar{\Phi}_f$ определяется орбитой прообраза пространства \mathbb{R}^{n-k} в пространстве \mathbb{R}^l относительно группы всех диффеоморфизмов в \mathbb{R}^l (при условии, что прообраз \mathbb{R}^{n-k} в \mathbb{R}^l имеет положительную размерность, что и будет предполагаться). Аналогично, любое отображение из $\bar{\Phi}_{\pi f}$ определяется орбитой прообраза нуля в пространстве \mathbb{R}^l относительно той же группы. Следовательно, если мы покажем, что для любого отображения из $\bar{\Phi}_f$ существует отображение из $\bar{\Phi}_{\pi f}$ с диффеоморфным прообразом нуля, и для отображения из $\bar{\Phi}_{\pi f}$ существует отображение из $\bar{\Phi}_f$ с диффеоморф-

* Определение эквивалентности версальных деформаций см. [12], стр. II9.

ным прообразом \mathbb{R}^{n-k} , то искомая эквивалентность будет доказана. Но это очевидно, так как для любого $g \in \overline{\Phi}_f$ прообраз \mathbb{R}^{n-k} совпадает с прообразом нуля для отображения $\mathcal{J}g$, а для любая $\Phi_{\mathcal{J}f}$ содержит отображение с диффеоморфным прообразом нуля. И наоборот, пусть теперь $h \in \overline{\Phi}_{\mathcal{J}f}$. Построим по h отображение g , прообраз \mathbb{R}^{n-k} которого совпадает с прообразом нуля для h . Пусть f_1, \dots, f_{n-k} — координатные функции отображения f , которые "забываются" проекцией \mathcal{J} . Тогда очевидно, что отображение $g = \{f_1, \dots, f_{n-k}, h\}$ имеет искомый прообраз. Замечание доказано.

5.1.2. Следствие. Версальные деформации Φ и $\overline{\Phi}$ регулярного ростка f (симметричной) матричной функции совпадают с \mathcal{V} -версальной деформацией ростка функции $\det f$, полученной композицией отображения f и взятия определителя.

Доказательство. Применим предыдущее замечание к ростку гиперповерхности $\det = 0$ в его гладкой (по условию регулярности)

точке.

5.1.3. Лемма. Пусть $f: \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^n$ и $\psi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ — устойчивые* ростки отображений, а $\Phi_{\text{im}f}\psi$ и $\Phi_{\text{im}\psi}f$ — трансверсали к орбитам $\mathcal{O}_{\text{im}f}\psi$ и $\mathcal{O}_{\text{im}\psi}f$ соответственно (являющиеся версальными деформациями соответствующих объектов). Тогда $\Phi_{\text{im}\psi}f$ эквивалентна $\Phi_{\text{im}f}\psi$.

Доказательство. Покажем, что каждая деформация индуцируется из другой. Рассмотрим малое возмущение \overline{f} отображения f . В силу устойчивости отображения f образ $\text{Im} \overline{f}$ диффеоморфен $\text{Im} f$. Обозначим через δ диффеоморфизм пространства \mathbb{R}^n , переводящий $\text{Im} \overline{f}$ в $\text{Im} f$. δ осуществляет диффеоморфизм пар $(\text{Im} \overline{f}, \text{Im} f)$ и $(\text{Im} f, \text{Im} \delta\psi)$. Следовательно, малое возмущение \overline{f} отображе-

*См. определение устойчивости в [12], стр. 10.

ния f индуцируется из малого возмущения $\delta\varphi$ отображения φ . Это означает, что f индуцируется из φ . Аналогично, φ индуцируется из f . Следовательно, $\varphi_{\text{inf}} f$ и $\varphi_{\text{inf}} \varphi$ эквивалентны.

5.2. Простейшие сингулярные случаи

Перейдем к рассмотрению простейших сингулярных случаев:

1) $\gamma: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (S\text{Mat}_2, 0)$ — гладкая кривая, проходящая через вершину конуса и касающаяся его образующей;

1') $\gamma': (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\text{Mat}_2, 0)$ — гладкая кривая, проходящая через вершину конуса и касающаяся его образующей;

2) $\Gamma: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (S\text{Mat}_2, 0)$ — гладкая поверхность, касающаяся конуса ($b^2/2 - ac = 0$);

3) $\Gamma: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (S\text{Mat}_2, \chi)$ — зонтик Уитни, касающийся гладкой точки конуса.

Напомним, что базис модуля аналитических векторных полей, касающихся однородной поверхности с изолированной особенностью в нуле, может быть задан следующим образом (см. [43]). Одной из образующих базиса является линейное поле $(x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, x_n \frac{\partial}{\partial x_n})$, а остальные — определители 2-миноров $(2 \times n)$ -матрицы:

$$\left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ p_{x_1} & \dots & \dots & p_{x_n} \end{array} \right\|,$$

где p — многочлен, задающий гиперповерхность, а $p_{x_1} = \frac{\partial p}{\partial x_1}$,
 \dots , $p_{x_n} = \frac{\partial p}{\partial x_n}$.

Нам в дальнейшем понадобится 3 базиса полей:

а) касающиеся конуса ($b^2/2 - ac = 0$)

$$v_1 = (a, b, c), \quad v_3 = (-a, 0, c),$$

$$v_2 = (0, a, b), \quad v_4 = (b, c, 0)$$

в) касающиеся конуса ($ad - bc = 0$)

$$v_1 = (a, b, c, d), \quad v_3 = (b, 0, d, 0),$$

$$v_2 = (c, d, 0, 0), \quad v_4 = (a, 0, 0, -d),$$

$$v_5 = (0, b, -c, 0), \quad v_7 = (0, 0, a, b)$$

$$v_6 = (0, a, 0, c),$$

с) касающиеся зонтика Уитни

$$v_1 = (0, b, c), \quad v_3 = (2c, 0, b^2),$$

$$v_2 = (2a, 0, c), \quad v_4 = (0, c, ab).$$

5.2.1. Случай I). Выберем оси a и c так, чтобы касательный вектор к образу γ в нуле касался оси a . Покажем, что существует диффеоморфизм, сохраняющий конус и превращающий росток γ в росток кривой $\bar{\gamma}$, лежащий в плоскости ac . Действительно, рассмотрим ось OO' — биссектрису координатного угла в плоскости ac . Введем на оси OO' параметр t и рассмотрим семейство $\mathcal{K}(t)$ плоскостей, перпендикулярных к OO' . Параметризуем кривую γ параметром t , сопоставляя значению t точку пересечения γ с плоскостью $\mathcal{K}(t)$. Построим теперь искомый диффеоморфизм как семейство поворотов плоскостей \mathcal{K} . А именно, плоскость $\mathcal{K}(t)$ поворачивается на угол, образованный отрезком $[t, \gamma(t)]$ со своей проекцией на плоскость ac . Легко убедиться, что это семейство поворотов задает диффеоморфизм. Тем самым, достаточно изучить случай плоской кривой. Обозначим через $\gamma_n(t)$ кривую, задаваемую соотношениями $(a=t, b=0, c=t^n)$, и покажем, что к этим случаям все сводится. Вычислим касательное пространство к орбите $\mathcal{O}_c \gamma_n$ ростка γ_n :

$$T\mathcal{O}_c \gamma_n = \mathcal{O}_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ nt^{n-1} \end{pmatrix} + \mathcal{O}_{(t,0,t^n)} \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t^n \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Кольцо $\mathcal{O}_{(t,0,t^n)}$ изоморфно кольцу \mathcal{O}_t , и, следовательно, касательное пространство — это \mathcal{O}_t -модуль, порожденный полями

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ nt^{n-1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t^n \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t^n \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ t^n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поле v_5 совпадает с $t^{n-1}v_4$ и, следовательно, может быть исключено. После простых линейных преобразований получаем следующий базис:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ nt^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^n \end{pmatrix}.$$

Ниже изображены мономы, входящие в версальную деформацию. Нам удобно выбрать следующую версальную деформацию Φ_n кривой γ_n :

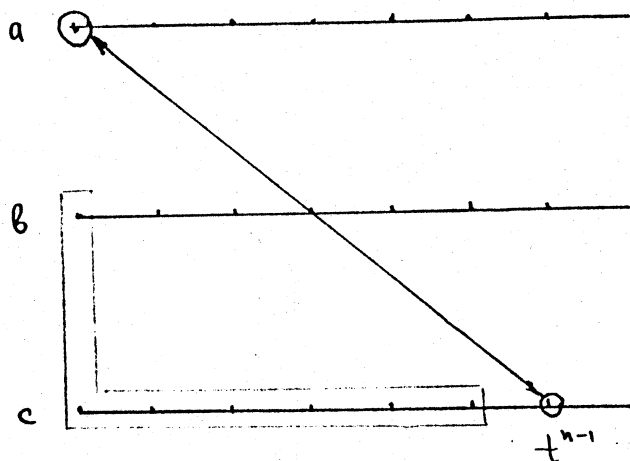


Рис. 5. Версальная деформация кривой γ_n (кружочками отмечены конкурирующие мономы)

$$\Phi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) = \{a=t, b=\lambda_{n+1}, c=t^n + \lambda_1 t^{n-1} + \dots + \lambda_n\}.$$

Прообраз конуса в пространстве параметров $(t, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ имеет вид

$$t^{n+1} + \lambda_1 t^n + \dots + \lambda_n t - \lambda_{n+1}^2 / 2 = 0,$$

Дискриминант в пространстве параметров $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$ есть гиперповерхность особенностей проектирования, или множество наборов $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1})$, при которых указанный многочлен имеет по t кратный корень. Заметим, что этот дискриминант совпадает с бифуркационной диаграммой версальной деформации особенности

D_{n+1} (что легко усмотреть из стандартного вида ее версальной деформации). Заметим, что в версальную деформацию кривой γ_n не входят мономы степени выше n -й. Это означает, согласно результатам [67] (см. также [28]), что орбита γ_n содержит все кривые вида $t, 0, \alpha t^n + \dots$, где многоточие означает члены более высокого порядка, и этот случай в отдельном рассмотрении не нуждается.

5.2.2. Случай I^*). Аналогично предыдущему, рассмотрим кривые γ'_n вида $(t, 0, 0, t^n)$. Соответствующее касательное пространство к орбите имеет вид

$$T\mathcal{O}_c \gamma'_n = \mathcal{O}_t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ nt^{n-1} \end{pmatrix} + \mathcal{O}_{(t,0,0,t^n)} \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ t^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t^n \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t^n \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ -t^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Базисом \mathcal{O}_t -модуля является следующий набор полей:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ nt^{n-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t^n \end{pmatrix}.$$

Мономы, входящие в версальную деформацию, изображены на рис.6.

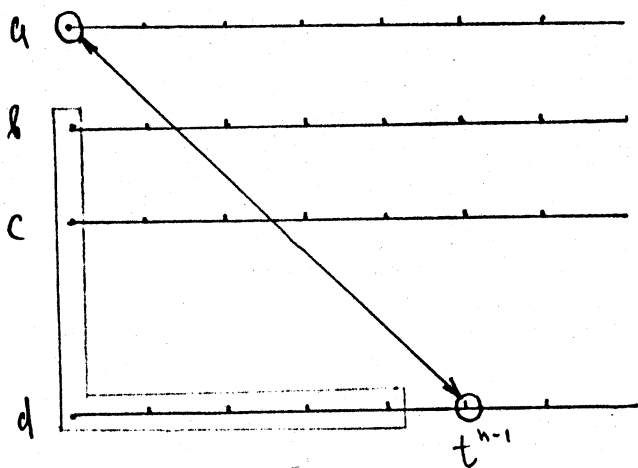


Рис.6. Версальная деформация кривой γ'_n .

Выберем версальную деформацию кривой γ'_n вида

$$\Phi_n(t, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+2}) = \left\{ \begin{aligned} a = t, \quad b = \lambda_{n+1}, \quad c = \lambda_{n+2}, \\ d = t^n + \lambda_1 t^{n-1} + \dots + \lambda_n \end{aligned} \right\}.$$

Прообраз конуса в семействе параметров имеет вид

$$t^{n+1} + \lambda_1 t^n + \dots + \lambda_n t - \lambda_{n+1} \lambda_{n+2} = 0.$$

Замечание. Многочлен, задающий прообраз конуса, стабильно эквивалентен соответствующему многочлену для случая I).

5.2.3. Случай 2). Легко убедиться, что имеются два различных вещественных случая общего положения, когда касательная плоскость к образу ростка Γ в нуле не касается образующих конуса. В одном из них пара (поверхность-конус) приводится к виду

$$\begin{aligned} a &= c, \\ b^2/2 &= ac, \end{aligned}$$

а в другом — к виду

$$\begin{aligned} a &= -c, \\ b^2/2 &= ac. \end{aligned}$$

В обоих случаях версальные деформации одномерны и представляют собой семейство параллельных переносов плоскости.

В случае касания ростка гиперповерхности и образующей конуса можно без потери общности считать, что I-струя ростка $(x, y) \rightarrow (a, b, c)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующие этой I-струе начальные струи системы образующих модуля векторных полей таковы:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

или, после приведения,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}.$$

Из результатов о спектральных последовательностях для приведения к нормальным формам (см. [12], стр. 180) следует, что струи отображения по первой и второй координатам всегда могут быть приведены к виду x и y соответственно, а по третьей координате можно избавиться от членов, делящихся на y . Тем самым, следует рассмотреть серию ростков Γ_k отображений вида

$$(a = x, b = y, c = \pm x^k).$$

Соответствующие Γ_k начальные струи базиса векторных полей имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm kx^{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ \pm x^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \pm x^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ \pm x^k \\ 0 \end{pmatrix}$$

или, после приведения,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm kx^{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm x^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тем самым, факторпространство $\Phi(x, y, \lambda)$ имеет базис, состоящий из мономов $1, x, \dots, x^{k-1}$ по третьей координате, и версальная деформация задается формулой:

$$\Phi(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \{a = x, b = y, c = \pm x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \dots + \lambda_k\}.$$

Знак при старшем члене роли не играет. Прообраз конуса в координатах (x, y) имеет вид

$$P(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = y^2/2 - x P(x) = 0,$$

где $p(x) = x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \dots + \lambda_k$.

Бифуркационная диаграмма в пространстве $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ - это множество наборов λ , при которых эта кривая негладкая.

Из условия негладкости

$$P(x, y) = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

имеем

$$y = (x p(x))' = 0.$$

Условие $(x p(x))' = 0$ распадается на два случая:

а) $x=0 \Rightarrow p(0) = 0$, т.е. p имеет корень в нуле;

в) $p=0 \Rightarrow x p'(x) = 0$, и так как $x \neq 0$, то $p'(x) = 0$,

т.е. p имеет кратный корень.

Согласно [II] эта бифуркационная диаграмма диффеоморфна бифуркационной диаграмме особенностей серии В.

5.2.4. Случай 3. Изучим сначала, какие бывают случаи необщего расположения касательной плоскости относительно зонтика, т.е. перечислим необщие орбиты действия 1-струй векторных полей, сохраняющих зонтик, на 1-струй ростков поверхностей. Ниже мы, пользуясь леммой II.5.1, будем рассматривать приведение гладкого ростка в окрестности стандартного зонтика.

Необходимо рассмотреть следующие 3 вида 1-струй:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ y \\ x \end{pmatrix} \quad \text{в) } \begin{pmatrix} y \\ \alpha x \\ x \end{pmatrix} \quad \text{г) } \begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В первом случае 1-струй векторных полей имеют вид

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2\alpha x + 2\beta y \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$$

или, после приведения,

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha x + \beta y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha x + 2\beta y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Он распадается на два подслучая:

а') $\beta \neq 0$ ($\text{codim} = 0$); в этом случае касательная плоскость приводится к виду $(\alpha = \beta)$;

а'') $\beta = 0$ ($\text{codim} = 1$); в этом случае I-струя приводится к виду $a=0$, $b=y$, $c=x$.

В случае в) для I-струи (y, dx, x) имеем следующие I-струи векторных полей:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ dx \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, I-струя отображения всегда приводится к виду

$$\begin{pmatrix} y \\ 0 \\ x \end{pmatrix}.$$

Выделим теперь случаи положительной коразмерности.

Для I-струи $(0, y, x)$ струи базиса векторных полей имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это означает (согласно результатам из [12], стр. 180), что достаточно ограничиться рассмотрением только ростков отображения вида $(f(y), y, x)$.

Рассмотрим серию $\Gamma_k: (y^k, y, x)$. Соответствующий базис полей имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} ky^{k-1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y^k \\ 0 \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{pmatrix},$$

а версальная деформация рассматриваемого отображения такова:

$$\Phi_k(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \{a = y^k + \lambda_1 y^{k-1} + \dots + \lambda_k, b = y, c = x\}.$$

Прообраз зонтика Уитни задается уравнением

$$x^2 - y^2(y^k + \lambda_1 y^{k-1} + \dots + \lambda_k) = x^2 - y^2 p(y) = 0.$$

В общей точке Λ прообраз имеет точку трансверсального самопересечения в нуле и является гладким в остальных точках. Нарушение общности положения связано с тем, что p имеет нулевой либо кратный корень. Тем самым, опять получилась версальная деформация особенностей серии В.

Случай $(y, 0, x)$. Соответствующие I-струи полей имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

или, после приведения,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Согласно общей технике спектральных последовательностей для приведения к нормальным формам достаточно ограничиться рассмотрением ростков $\Gamma_k: (y, x^k, x)$. Соответствующие им начальные струи полей имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ kx^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^k \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 0 \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ x^{2k} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ x^{k+1} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ kx^{k-1} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^k \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Версальная деформация имеет вид

$$\Phi_k(x, y, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \{ a = x, b = x^k + \lambda_1 x^{k-1} + \dots + \lambda_k, c = y \}.$$

Прообраз зонтика задается формулой

$$y^2 - xc(x^k + \lambda_k x^{k-1} + \dots + \lambda_1)^2 = y^2 - xc p^2(xc) = 0.$$

В простых корнях многочлена p на оси x заданная кривая имеет трансверсальные самопересечения и в нуле касается оси y .

Вырождения связаны с тем, что у p возникает нулевой либо кратный корень.

Случай с). k -струя отображения имеет вид (y, x, y^k) .

Соответствующие начальные струи векторных полей

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ky^{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ y^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y^k \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ y^k \\ xy \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ky^{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Тем самым, можно ограничиться рассмотрением ростков $\theta_k = (y, x, y^k)$.

Начальные струи соответствующих полей имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ky^{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y \\ 0 \\ y^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2y^k \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y^k \\ xy \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ ky^{k-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ y^k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Версальная деформация задается формулой

$$\Phi_k(x, y, \lambda_0, \dots, \lambda_k) = \{ a = y, b = x, c = \lambda_0 x + y^k + \lambda_1 y^{k-1} + \dots + \lambda_k \}$$

Прообраз зонтика имеет вид

$$(\lambda_0 x + p(y))^2 - x^2 y = 0, \quad \text{где } p(y) = y^k + \lambda_1 y^{k-1} + \dots + \lambda_k.$$

Опишем теперь случаи необщего положения. Обозначим $\lambda_0 x + p(y)$ через R . Естественная стратификация зонтика состоит из его вершины, ребра и гладкой части (полотнища).

Нетрансверсальность вершине влечет $R = x = y = 0$. Тем самым, $\lambda_k = 0$.

Нетрансверсальность ребру влечет $R = \infty = 0$. Тем самым, имеет кратный корень.

Легко убедиться, что нетрансверсальность полотнощу эквивалентна тому, что $p(\lambda_0^2) = 0$.

§ 6. Порядки уплощений овалоидов строго гиперболических гиперповерхностей (особенности волновых фронтов)

Рассмотрим теперь восходящий к И.Г.Петровскому вопрос об особенностях гиперповерхностей, двойственных к строго гиперболическим. Эти поверхности возникают в теории задачи Коши для гиперболических уравнений и называются волновыми фронтами.

Изучим особенности фронтов в двумерном случае. Они соответствуют точкам уплощения исходных строго гиперболических кривых. А именно, точке уплощения k -го порядка (где k — вещественная кратность пересечения ростка кривой с касательной в точке уплощения) соответствует на двойственной кривой особенности A_{k-1} .

Пусть Γ — строго гиперболическая кривая степени d . Занумеруем овалы кривой Γ подряд от внутреннего ко внешнему в порядке вложенности. Пусть x — точка на i -м овале, а γ_x — касательная к овалу в точке x . Очевидно, что $\#_x \leq 2i$, так как суммарная вещественная кратность пересечения γ_x с Γ не превышает d , и γ_x имеет не менее $d - 2i$ точек пересечения с овалами, содержащими i -й. Для внешней ветви максимальный порядок уплощения также не превосходит d , кроме того вырожденного случая, когда внешняя ветвь является прямой.

6.1. Теорема. Для любого $i = 1, \overline{[d/2]}$ существуют строго гиперболические кривые, для которых в некоторых точках i -го овала порядок уплощения равен $2i$. Если d нечетно, то существует

строго гиперболическая кривая, на внешней ветви которой есть точка уплощения порядка d .

Доказательство. Построим для каждого натурального n кривую Γ_{2n} степени $2n$ с точкой уплощения порядка $2n$ на внешнем овале и кривую Γ_{2n-1} с точкой уплощения порядка $2n-1$ на внешней ветви. Зададим Γ_{2n} и Γ_{2n-1} следующими уравнениями

$$\Gamma_{2n}: (x^2-1) \prod_{i=1}^{n-1} (x^2+y^2-c_i^2) + \varepsilon y^{2n} = 0, \quad (I2)$$

$$\Gamma_{2n-1}: (x-1) \prod_{i=1}^{n-1} (x^2+y^2-c_i^2) + \varepsilon y^{2n-1} = 0, \quad (I3)$$

где $0 < |c_i| < 1$, ε мало.

Рассматриваемые кривые являются строго гиперболическими и имеют при малых ε в точке $(1,0)$ уплощение максимального порядка. Действительно, без члена с ε выписанные уравнения задают кривые, состоящие из набора окружностей и пары прямых в случае (I2) и набора окружностей и одной прямой в случае (I3). Добавление члена с ε превращает две прямые во внешний овал в случае (I2) и задает C^0 -близкую кривую в случае (I3). Из явных формул видно, что Γ_{2n} и Γ_{2n-1} касаются прямой ($x=1$) так же, как $x-1 = y^{2n}$ и $x-1 = y^{2n-1}$ т.е. с искомым порядком. Возмущая Γ_{2n} и Γ_{2n-1} членами y^i , $i < 2n$, можно получать строго гиперболические кривые с любыми меньшими порядками уплощения. Далее, рассматривая приводимые кривые, состоящие из набора окружностей, внутри которых содержатся уже построенные кривые, получаем примеры уплощений на внутренних овалах. Теорема доказана.

ГЛАВА III. ОСОБЕННОСТИ ОБЛАСТЕЙ НЕОСЦИЛЛЯЦИОННОСТИ. ОБОБЩЕННАЯ
ТЕОРИЯ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ ШТУРМА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИИ

§ I. Кривые линейных обыкновенных дифференциальных уравнений
и распределение Картана

I.I. Основные кривые

В этом параграфе мы свяжем с линейным обыкновенным дифференциальным уравнением (3), заданным на отрезке $I = [a, b]$, 3 кривые в различных пространствах и опишем их свойства.

I.I.I. Определение. Пусть V — пространство, двойственное к пространству решений уравнения (3). Тогда аффинной кривой $af: I \rightarrow V$ уравнения (3) назовем кривую, заданную соотношением

$$\langle af(t), \psi \rangle = \psi(t),$$

где ψ — любое решение уравнения (3).

Для любой фундаментальной системы ψ_1, \dots, ψ_n решений уравнения (3) компонентами кривой af в базисе, двойственном выбранной фундаментальной системе, являются значения $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$.

Замечание. Основным свойством кривой af является то, что определитель матрицы, составленный из $af(t), af'(t), \dots, af^{(n-1)}(t)$ (являющийся определителем Вронского уравнения (3)), отличен от нуля.

Замечание. Число корней любого решения ψ есть кратность пересечения кривой af с гиперплоскостью в V , двойственной к ψ .

I.I.2. Определение. Проективизацию кривой af назовем проективной кривой pr уравнения (3).

Приведем другое определение кривой pr .

Пусть $P(V)$ — проективизация пространства V , двойствен-

ного к пространству решений уравнения (3). Проективной кривой $pr : I \rightarrow P(V)$ назовем кривую, сопоставляющую моменту $t \in I$, гиперплоскости решений уравнения, обращающихся в нуль в момент t .

I.I.3. Определение. Точка проективной кривой в RP^{n-1} называется точкой неуплощения, если можно выбрать такую аффинную систему координат с началом в этой точке, что росток кривой будет параметризоваться следующим образом: $(t^+, \dots, t^2+, \dots, \dots, t^{n-1}+, \dots)$. Проективная кривая называется неуплощающейся, если все ее точки — точки неуплощения.

В силу сделанного выше замечания проективная кривая уравнения (3) является неуплощающейся.

В каждой точке неуплощения проективной кривой однозначно определен полный сопровождающий флаг, состоящий из соприкасающихся подпространств всех размерностей. (Для этого можно параметризовать росток натуральным параметром и взять подпространства, натянутые на i последовательных производных вектор-функции, задающей этот росток в аффинных координатах.)

Дадим определение флаговой кривой уравнения (3) (см. § I.2).

I.I.4. Определение. Флаговой кривой уравнения (3) назовем отображение $f\ell : I \rightarrow F_V$, сопоставляющее каждому моменту t полный флаг в пространстве V , двойственный к полному флагу в пространстве решений, i -мерное подпространство которого состоит из решений, имеющих в момент t корень кратности $\geq n-i$.

I.I.5. Лемма. Флаговая кривая уравнения (3) состоит из сопровождающих флагов проективной кривой уравнения.

Доказательство. Действительно, производная к кривой решений, имеющих в момент t корень, состоит из решений, имеющих в момент t двукратный корень и т.д.

Чтобы сравнивать кривые разных дифференциальных уравнений

вида (3), отождествим пространства их решений с пространством $(n-1)$ -струй в точке a . Это отождествление индуцирует отождествление двойственных пространств, их проективизаций и т.д.

Выберем в пространстве V , двойственном к пространству $(n-1)$ -струй в точке a , базис из n линейных функционалов, i -й из которых вычисляет значение $(i-1)$ -й производной в точке a . В этом базисе координаты аффинной кривой любого уравнения (3) совпадают с фундаментальной системой решений ψ_1, \dots, ψ_n , удовлетворяющей соотношению

$$\psi_i^{(j-1)}(a) = \delta_{ij}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (14)$$

После применения описанного выше отождествления возникает отображение из пространства всех линейных уравнений (3) в пространство неуплощающихся кривых в $\mathbb{R}P^{n-1}$, которые имеют в начальной точке фиксированный сопровождающий флаг.

1.2. Распределение Картана

Пусть $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}\}$ — полный флаг в \mathbb{R}^n . Зададим в F_n набор из $n-1$ гладких кривых $\gamma_\alpha^1, \dots, \gamma_\alpha^{n-1}$, проходящих через α и определяемых следующими соотношениями:

$$\gamma_\alpha^i = \{\alpha_1 \subset \dots \subset \alpha_{i-1} \subset L_i \subset \alpha_{i+1} \subset \dots \subset \alpha_{n-1}\}, \quad i = \overline{1, n-1},$$

где L_i — пробегает множество i -мерных подпространств, удовлетворяющих написанным включениям (см. [19]). Касательные прямые к γ_α^i , $i = \overline{1, n-1}$, в точке α линейно независимы. Натянем на них $(n-1)$ -мерную плоскость $\overline{LC}_\alpha \subset TF_n$. Удалим из \overline{LC}_α все $(n-2)$ -мерные плоскости $LC_{\alpha, j}$, $j = \overline{1, n-1}$, где $LC_{\alpha, j}$ натянута на касательные прямые ко всем γ_α^i , кроме j -й.

1.2.1. Лемма. Распределение \overline{LC} является неголономным распределением на F_n .

Для доказательства неголономности рассмотрим 2^n -листное накрытие $\sigma: O_n \rightarrow F_n$ пространства F_n ортогональной группой. σ сопоставляет каждой ортогональной матрице полный флаг, i -мерные пространства которого натянуты на i первых строк исходной матрицы. Легко вычислить прообраз распределения \overline{LC} в группе O_n . В силу очевидной левоинвариантности достаточно рассмотреть линейное пространство в касательном пространстве к единице группы, т.е. в алгебре Ли. Алгеброй Ли группы O_n является алгебра O_n кососимметрических матриц, а соответствующее n -мерное линейное пространство распределения — это пространство кососимметрических матриц, у которых отличны от нуля лишь почти главные диагонали (2 диагонали, ближайшие к главной). Очевидно, что коммутаторы этого линейного пространства порождают всю алгебру Ли, и, следовательно, рассматриваемое распределение неголономно.

1.2.2. Определение. Распределением Картана в TF_n на пространстве назовем распределение $LC_\alpha = \overline{LC}_\alpha \vee \bigcup_{i=1}^n LC_{\alpha, i}$.

Покажем теперь, что флаговая кривая уравнения (3) касается распределения Картана.

1.2.3. Лемма. Иммерсированная кривая $f\ell: I \rightarrow F_n$ является флаговой кривой уравнения (3) тогда и только тогда, когда она всюду касается распределения LC .

Доказательство. В силу леммы Ш.1.1.5 флаговая кривая дифференциального уравнения (3) состоит из сопровождающих флагов его проективной кривой. Инфинитезимальное движение i -мерного подпространства сопровождающего флага проективной кривой происходит в $(i+1)$ -мерном подпространстве. Так как кривая является неуплощающейся, то инфинитезимальное движение i -мерного подпро-

странства является поворотом с ненулевой скоростью. Это и означает касание флаговой кривой описанного распределения Картана.

Тем самым, из предыдущей леммы следует, что возникает отображение из пространства E_{q_n} всех линейных дифференциальных уравнений n -го порядка, заданных на $I = [a, b]$, в пространство флаговых кривых в F_V (где V -пространство, двойственное к пространству $(n-1)$ -струй в точке α), касающихся распределения Картана и имеющих фиксированные начальную точку и вектор скорости.

1.3. Определение. Концевым отображением $\pi_n: E_{q_n} \rightarrow F_n$ назовем отображение, сопоставляющее каждому уравнению конец его флаговой кривой.

Докажем следующее утверждение.

1.3.1. Лемма. Для любого уравнения (3) существует $n(n-1)/2$ -параметрический росток его деформации в пространстве E_{q_n} , который невырожденно проектируется на окрестность его концевой точки в F_V .

Доказательство. Так как распределение LC получено из неголономного распределения \overline{LC} выбрасыванием из каждого линейного подпространства конечного набора гиперплоскостей, то при изучении малой деформации кривой, касающейся LC , можно считать, что мы имеем дело с распределением \overline{LC} . Согласно теореме Чжоу-Рашевского для любой интегральной кривой γ распределения подпространств существует семейство C^0 -близких к γ кривых, концы которых замечают малую окрестность концевой точки кривой γ . Тот же факт выполняется и в C^k -топологии. Отсюда и вытекает, что можно выбрать с окрестности произвольного уравнения из E_{q_n}

$n(n-1)/2$ -параметрический росток семейства, являющегося образом концевой точки данного уравнения, для которого справедливо утверждение леммы.

2.2. Клеточные разбиения и порядок Брюа

Напомним способ отождествления клеток разбиения Шуберта в \mathbb{R}^n и элементов группы перестановок S_n .

2.2.1. Определение. Назовем базис e_1, \dots, e_n в исходном пространстве $\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$, согласованным с флагом α , если для всех $i = \overline{1, n-1}$ i -мерное подпространство флага α натянуто на e_1, \dots, e_i .

2.2.2. Определение. Флаг назовем координатным, если все его подпространства натянуты на векторы выбранного базиса.

Зададим теперь действие группы перестановок S_n на пространстве $\mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)$ с помощью перестановки векторов выбранного базиса. Если базис выбран согласованным с α , то орбита флага состоит из всех координатных флагов. В каждой клетке разбиения Шуберта содержится ровно один элемент (координатный флаг) из орбиты $S_n \alpha$. Перестановка, с помощью которой он получен из α , сопоставляется рассматриваемой клетке. Размерность клетки равна числу беспорядков соответствующей ей перестановки, т.е. числу пар (i, j) , где $i > j$ и i стоит в перестановке раньше j .

Введем теперь на группе S_n отношение частичного порядка, называемое порядком Брюа (см. [53]).

Пусть s_1 и s_2 — две перестановки, такие что длина s_1 на единицу меньше длины s_2 . (Длиной перестановки называется длина ее наименьшего разложения в произведение транспозиций.)

Скажем, что $s_1 < s_2$ по Брюа, если s_2 получается из s_1 либо с помощью одной транспозиции, либо перестановкой пары чисел i и $i+1$. Продолжив это отношение по транзитивности, получим на S_n частичный порядок Брюа.

Замечание. Клетки Шуберта разбиения пространства F_n примыкают друг к другу тогда и только тогда, когда соответствующие им перестановки сравнимы по Брюа.

2.3. Аффинные карты в пространстве флагов

2.3.1. Определение. Введем расслоение $\gamma: GL_n \rightarrow F_n$, сопоставляющее каждой матрице флаг, i -мерное подпространство которого натянуто на первые i строк. Группа GL_n действует на себе левым умножением. Слой нашего расслоения отождествляется с подгруппой невырожденных нижнетреугольных матриц. Действительно, при умножении на такую матрицу слева к i -й строке любой матрицы прибавляется линейная комбинация предыдущих, что не изменяет флага-образа.

2.3.2. Определение. Прямым флагом данного базиса e_1, \dots, e_n назовем флаг α , согласованный с ним, а обратным — флаг, i -мерные подпространства которого натянуты на e_n, \dots, e_{n-i+1} .

Стабилизатором прямого флага является группа нижнетреугольных матриц с единичной диагональю, действующая правым умножением.

2.3.3. Лемма. Множество флагов, трансверсальных обратному флагу базиса e_1, \dots, e_n , отождествляется с группой T_n верхнетреугольных (в выбранном базисе) матриц с единичной диагональю. При этом отождествлении i -мерное подпространство флага, соответствующего данной матрице, натянуто на ее первые i строк.

Доказательство. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ — флаг, трансверсальный обратному флагу базиса e_1, \dots, e_n . Рассмотрим прямую α_1 и спроектируем ее вдоль подпространства (e_2, \dots, e_n) на ось e_1 . В силу трансверсальности эта проекция сюръективна. Выберем на α_1 вектор, проектирующийся в точку $(1, 0, \dots, 0)$. Рассмотрим плоскость α_2 и спроектируем ее на плоскость (e_1, e_2) . Тогда в силу трансверсальности проекция сюръективна, и найдется вектор, проектирующийся в точку $(0, 1, \dots, 0)$ и т.д.

Указанное отождествление задает естественные координаты в клетке $F_n \setminus \mathbb{W}_{\alpha^1}$, где α^1 — обратный флаг базиса e_1, \dots, e_n .

2.4. Шлейф в аффинной карте

2.4.1. Лемма. Пусть α - флаг, соответствующий верхнетреугольной матрице A , тогда уравнение i -й компоненты шлейфа \mathcal{W}_α в клетке $F_n \setminus \mathcal{W}_{\alpha_1}$ имеет вид

$$\det \| A^i, B^{n-i} \| = 0, \quad (I5)$$

где $\| A^i, B^{n-i} \|$ - $(n \times n)$ -матрица, составленная из i первых строк матрицы A и $(n-i)$ первых строк матрицы B .

Доказательство. Очевидно, что условие нетрансверсальности пространств дополнительных размерностей, натянутых на два набора векторов, имеет указанный вид.

2.4.2. Определение. Минор квадратной матрицы называется главным правым, если он составлен из i первых строк и i последних столбцов.

Замечание. Если $A = E$, т.е. α - прямой флаг базиса, то уравнение компонент шлейфа \mathcal{W}_E имеет следующий простой вид:

$$\Delta_i = 0, \quad (I6)$$

где Δ_i - i -й главный правый минор матрицы B .

Общее уравнение шлейфа \mathcal{W}_E имеет вид

$$\Delta_1 \cdot \dots \cdot \Delta_{n-1} = 0. \quad (I7)$$

Замечание. В GL_n условие нетрансверсальности имеет тот же самый вид (I5)-(I7). В силу транзитивности действия группы GL_n на F_n локальное изучение шлейфа любого флага эквивалентно изучению уравнения (I7).

2.4.3. Лемма. Уравнение (I7) инвариантно относительно действия на группе T_n тора $(R \setminus 0)^n$, где i -я образующая этого тора действует на матрицу из T_n умножением i -й строки на ненулевое число λ , а i -го столбца - на λ^{-1} .

Заметим, что указанный тор содержит дискретную подгруппу $G = \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{n-1 \text{ раз}}$ преобразований, состоящих в одновременной

смене знаков одноименных строк и столбцов.

2.5. Некоторые локальные свойства шлейфа

2.5.1. Определение (см. [24]). Матрица A называется вполне неотрицательной, если определители всех ее миноров неотрицательны. Матрица называется вполне положительной, если определители всех ее миноров положительны.

2.5.2. Определение. Назовем миноры квадратной матрицы, не содержащие строки или столбца под главной диагональю, допустимыми.

2.5.3. Определение. Верхнетреугольная матрица называется вполне положительной, если определители всех ее допустимых миноров положительны.

2.5.4. Теорема. Полугруппа T_n^+ вполне положительных верхнетреугольных матриц с единичной диагональю является одной из стягиваемых компонент в $T_n \setminus \Omega_\varepsilon$.

Доказательству предположим два предложения из общей теории матриц (см. [24] стр. 113 и 306).

Обозначим через $A(i_1, \dots, i_e; j_1, \dots, j_e)$ минор матрицы A , составленный из пересечения строк с номерами i_1, \dots, i_e и столбцов с номерами j_1, \dots, j_e .

2.5.5. Определение. Строчной неплотностью η_r минора $A(i_1, \dots, i_e; j_1, \dots, j_e)$ назовем $\sum_{m=1}^e (i_m - i_{m-1} - 1)$, а столбцовой неплотностью η_c - $\sum_{m=1}^e (j_m - j_{m-1} - 1)$. Минор, для которого $\eta_r = \eta_c = 0$, назовем плотным.

2.5.6. Предложение. Для любой вполне неотрицательной квадратной $(n \times n)$ -матрицы A и $k = \overline{1, n-1}$ выполнено неравенство

$$\det A \leq \det A \begin{pmatrix} 1, \dots, k \\ 1, \dots, k \end{pmatrix} \cdot \det A \begin{pmatrix} k+1, \dots, n \\ k+1, \dots, n \end{pmatrix} \quad (18)$$

Доказательство предложения вытекает из следующего более общего предложения.

Определение. Минор $A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_\ell \\ j_1, \dots, j_\ell \end{pmatrix}$ назовем почти главным, если $\sum_{\nu=1}^{\ell} |i_\nu - j_\nu| = 1$.

2.5.7. Предложение. Если в матрице A все главные и почти главные миноры неотрицательны, то для любого k выполнено неравенство (18).

Доказательство. Установим справедливость неравенства для матриц, у которых все главные миноры положительны, а почти главные — неотрицательны.

При $n = 2$ сразу получаем искомое утверждение

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \leq a_{11}a_{22},$$

так как по условию $a_{12}a_{21} \geq 0$.

Докажем предложение по индукции. Если $n \geq 2$, то одно из чисел k и $n - k$ больше 1; не нарушая общности будем считать, что $k > 1$.

Введем в рассмотрение матрицу $D = \|d_{ij}\|$, элементы которой определяются равенствами

$$d_{ij} = A \begin{pmatrix} 1, \dots, k-1, i \\ 1, \dots, k-1, j \end{pmatrix}, \quad (i, j = k, \dots, n).$$

В силу тождества Сильвестра

$$D \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_q \\ j_1, \dots, j_q \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k-1 \\ 1, 2, \dots, k-1 \end{pmatrix}^{q-1} A \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k-1, i_1, \dots, i_q \\ 1, 2, \dots, k-1, j_1, \dots, j_q \end{pmatrix}.$$

В матрице D также все главные миноры положительны, а почти главные неотрицательны.

Так как, согласно предположению индукции, доказываемая теорема верна для матриц порядка $< n$, то, дважды используя тождество Сильвестра, можно написать:

$$\begin{aligned} A \begin{pmatrix} 1, \dots, n \\ 1, \dots, n \end{pmatrix} &= \frac{D \begin{pmatrix} k, k+1, \dots, n \\ k, k+1, \dots, n \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1, \dots, k-1 \\ 1, \dots, k-1 \end{pmatrix}^{n-k}} \leq \frac{d_{pp} D \begin{pmatrix} k+1, \dots, n \\ k+1, \dots, n \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1, \dots, k-1 \\ 1, \dots, k-1 \end{pmatrix}^{n-k}} = \\ &= \frac{A \begin{pmatrix} 1, \dots, k \\ 1, \dots, k \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \\ 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n \end{pmatrix}}{A \begin{pmatrix} 1, \dots, k-1 \\ 1, \dots, k-1 \end{pmatrix}} \leq \\ &\leq A \begin{pmatrix} 1, \dots, k \\ 1, \dots, k \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} k+1, \dots, n \\ k+1, \dots, n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь общий случай, когда среди главных миноров имеются равные нулю.

Покажем, что произвольную матрицу с неотрицательными главными и почти главными минорами можно с любой степенью точности аппроксимировать матрицей, у которой все главные миноры положительны, а почти главные — неотрицательны. Действительно, определим аппроксимирующую матрицу равенством

$$A_\varepsilon = |a_{ij} + \varepsilon \delta_{ij}|.$$

Для главных миноров A_ε имеет место соотношение

$$\begin{aligned} A_\varepsilon \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_k \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_k \end{pmatrix} + \varepsilon \sum_{v=1}^k A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_{v-1}, i_{v+1}, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_{v-1}, i_{v+1}, \dots, i_k \end{pmatrix} \\ + \varepsilon^k &> 0 \quad (i_1, \dots, i_k = 1, 2, \dots, n; k = 1, \dots, n). \quad (18') \end{aligned}$$

С другой стороны, для любого почти главного минора

$$A_\varepsilon \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_{v-1}, i, i_{v+1}, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_{v-1}, i \pm 1, i_{v+1}, \dots, i_k \end{pmatrix} \geq A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_{v-1}, i, i_{v+1}, \dots, i_k \\ i_1, \dots, i_{v-1}, i \pm 1, i_{v+1}, \dots, i_k \end{pmatrix}.$$

тановим это для плотного минора $A \begin{pmatrix} i, \dots, i+l \\ j, \dots, j+l \end{pmatrix}$. Действительно, воспользовавшись неотрицательностью и неравенством (18), имеем:

$$0 = \det A \begin{pmatrix} i, \dots, i+l \\ j, \dots, j+l \end{pmatrix} \det A \begin{pmatrix} 1, \dots, i-1 \\ j-i, \dots, j-1 \end{pmatrix} \geq \det A.$$

Далее, применив (18) к минору $A \begin{pmatrix} 1, \dots, i+l \\ j-i, \dots, j+l \end{pmatrix}$, получим

$$0 = \det A \begin{pmatrix} 1, \dots, i+l \\ j-i, \dots, j+l \end{pmatrix} \det A \begin{pmatrix} i+l+1, \dots, n-j+i \\ j+l+1, \dots, n \end{pmatrix} \geq \Delta_{n-j+i} = 0.$$

Утверждение доказано. Пусть теперь $A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_\ell \\ j_1, \dots, j_\ell \end{pmatrix}$ — неплотный допустимый минор минимального размера верхнетреугольной матрицы A , равный нулю и имеющий положительные η_r или η_c . Найдем вырожденный минор того же размера с меньшими значениями η_r и η_c . Действительно, положим, не теряя общности, что $\eta_c > 0$. Добавим к минору $A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_\ell \\ j_1, \dots, j_\ell \end{pmatrix}$ пересечение столбца с максимальным номером, заключенным между j_1 и j_ℓ , со строками i_1, \dots, i_ℓ . (Если такого нет, значит $\eta_c = 0$.) Применим к получившейся матрице тождество (19). Так как по предположению определители всех допустимых миноров размера $< \ell$ положительны, и правая часть тождества равна нулю, то равен нулю определитель более плотного минора, получаемого из $A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_\ell \\ j_1, \dots, j_\ell \end{pmatrix}$ заменой последнего j_ℓ -го столбца на добавляемый. Проведя эту процедуру по строкам и столбцам, получим, что $\det A \begin{pmatrix} i_1, \dots, i_{\ell+1} \\ j_1, \dots, j_{\ell+1} \end{pmatrix}$.

Следовательно, $\Delta_{n-j+i} = 0$ по первой части доказательства. Теорема доказана.

2.6. Определим теперь еще ряд компонент в $T_{\Pi} \setminus \cup E$.

2.6.1. Определение. Назовем полугруппу, состоящую из элементов, обратных к элементам данной полугруппы, обратной подгруппой.

2.6.2. Теорема. $T_n \setminus W_E$ содержит 2^{n-1} компонент связности, получающихся действием на полугруппу T_n^+ вполне положительных верхнетреугольных матриц группы G одновременной смены знаков одноименных строк и столбцов. Эти компоненты являются полугруппами и разбиваются на пары взаимнообратных.

Доказательство. Согласно лемме Ш.2.4.3 шлейф W_E инвариантен относительно действия группы G . Следовательно, орбита любой из компонент связности в $T_n \setminus W_E$ является объединением компонент связности. Легко убедиться, что орбита $G T_n^+$ под действием G полная (т.е. состоит из 2^{n-1} элементов). В силу коммутирования действия группы G и умножения в T_n элементы орбиты также являются полугруппами. Для того чтобы матрица принадлежала орбите $G T_n^+$, необходимо и достаточно, чтобы у нее были отличны от нуля определители всех допустимых миноров. Их знаки определяются элементом g , с помощью которого рассматриваемая компонента получена из T_n^+ . Указанное свойство верхнетреугольных матриц сохраняется при переходе к обратным матрицам (см. [23]). Это и означает, что компоненты дополнения разбиваются на пары взаимнообратных.

2.7. Шлейфы и ростки флаговых кривых уравнений

Пользуясь полученными результатами, установим некоторые свойства флагов и флаговых кривых уравнений относительно шлейфа.

2.7.1. Лемма. Пусть $g T_n^+$ — любая из рассмотренных выше полугрупп, а δ — ее элемент. Тогда образ $\delta g T_n^+$ ее левого сдвига лежит в $g T_n^+$.

Доказательство. Рассмотрим полугруппу T_n^+ . Пусть A — принадлежащая ее границе вполне неотрицательная, но не положительная верхнетреугольная матрица. Рассмотрим матрицу δA , где δ вполне положительна. Согласно формуле для миноров произведения (см. [23] стр. 91) матрица δA будет вполне положительной, что и завершает доказательство.

2.7.2. Лемма. Флаги, соответствующие матрицам из взаимнообратных полугрупп в $T_n \setminus \mathcal{W}_\varepsilon$, трансверсальны друг другу.

Доказательство. Как следует из формулы (15), шлейфы инвариантны относительно действия T_n на себе левым умножением. Пусть A и B — матрицы из взаимнообратных полугрупп в $T_n \setminus \mathcal{W}_\varepsilon$. Будем считать без потери общности, что A лежит в T_n^+ , а B — в ее обратной, обозначаемой через T_n^- . Тогда по предыдущей лемме $A \in BT_n^+$ и, следовательно, не лежит на \mathcal{W}_ε . Лемма доказана.

2.8. Докажем теперь утверждение о кратности пересечения ростка флаговой кривой уравнения (3) со шлейфом.

Определение. Назовем кратностью пересечения гладкой кривой и гиперповерхности порядок ограничения дивизора этой гиперповерхности на кривую.

2.8.1. Кратность пересечения ростка ℓ флаговой кривой уравнения (3) со шлейфом \mathcal{W}_α флага α зависит только от клетки построенного по α разбиения Шуберта, в которой лежит точка пересечения и может быть вычислена следующим образом. Построим по α клеточные разбиения Шуберта всех грассманианов $G_{i,n}$, $i = \overline{1, n-1}$. Тогда кратность $\#_i$ пересечения ростка ℓ с i -й компонентой равна коразмерности клетки разбиения в $G_{n-i,n}$, в которой лежит $(n-i)$ -мерная плоскость флага в момент нетрансверсальности. Пусть (j_1, \dots, j_n) — перестановка, соответствующая клетке в которой лежит флаг из ℓ в момент нетрансверсальности. Тогда $\#_i$

вычисляются по следующей формуле:

$$\#_i = \max \left(0, \sum_{m=n-i+1}^n (j_m - (n-m-1)) \right). \quad (20)$$

Доказательство. Пусть $af: I \rightarrow V$ — росток аффинной кривой уравнения (3) (см. § III.1) такой, что его флаговая кривая не трансверсальна флагу $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ при $t = 0$. Легко показать, что существует единственный согласованный с α базис в пространстве V , такой что координаты ростка af в нем имеют вид

$$\begin{aligned} af_1(t) &= \frac{t^{i_1-1}}{(i_1-1)!} + \dots \\ &\vdots \\ af_n(t) &= \frac{t^{i_n-1}}{(i_n-1)!} + \dots, \end{aligned} \quad (21)$$

где (i_1, \dots, i_n) образует перестановку, соответствующую клетке построенного по α разбиения в F_V , которой принадлежит $f(0)$. Рассмотрим матрицу Вронского $W(t)$ фундаментальной системы af_1, \dots, af_n уравнения (3). Кратность пересечения ростка f с \mathbb{W}_α равна кратности пересечения $W(t)$ с $\nu^{-1}(\mathbb{W}_\alpha)$ в группе GL_n , где ν — проекция в расслоении $GL_n \rightarrow F_n$.

Запишем разложение матричных элементов вронскиана $W(t)$ в ряд по степеням t :

$$W_j(t) = \left\{ \frac{t^{i_j-1}}{(i_j-1)!} + \dots, \frac{t^{i_j-2}}{(i_j-2)!} + \dots, \dots, 1 + \dots, \dots \right\}.$$

Согласно формуле (16) уравнение i -й компоненты прообраза $\nu^{-1}(\mathbb{W}_\alpha)$ в базисе, согласованном с α , имеет вид

$$\Delta_i = 0,$$

где Δ_i — i -й главный правый минор матрицы $W(t)$.

Определим кратность пересечения $W(t)$ с i -й компонентой шлейфа, ограничив на $W(t)$ уравнение $\Delta_i = 0$. Вычислим младший по t член разложения. Из явного вида разложения (21) получаем, что степень младшего члена зависит только от перестановки (i_1, \dots, i_n) и вычисляется так. Сравним перестановку (i_n, \dots, i_1) с единичной перестановкой $(1, \dots, n)$ и вычислим разность между суммой первых i членов рассматриваемой перестановки и единичной. Эта разность задается формулой (20) и равна площади части диаграммы Юнга, которая и совпадает с коразмерностью соответствующей клетки в грассманиане $G_{i,n}$ (см. [54]). Лемма доказана.

2.8.2. Лемма. Пусть $f_l: I \rightarrow V$ — росток флаговой кривой уравнения (3), и $f_l(0)$ — флаг при $t = 0$. Тогда после перехода в аффинную карту, отождествляемую с T_Ω в базисе e_1, \dots, e_n , согласованном с $f_l(0)$, части ростка до и после пересечения лежат во взаимнообратных компонентах $T_\Omega \setminus \cup f_l(0)$.

Доказательство. Рассмотрим флаговую кривую уравнения $x^{(n)} = 0$, так как любой другой неуплощающийся росток можно продеформировать в классе неуплощающихся в рассматриваемый. Координаты флаговой кривой этого уравнения в T_Ω задаются формулами

$$f_{l_{ij}}(t) = \begin{cases} t^{j-i} / (j-i)! & \text{при } j \geq i \\ 0 & \text{при } i > j. \end{cases}$$

В этом случае смена знака времени преобразует $f_l(t)$ в $f_l^{-1}(t)$, т.е. $f_l(-t) = f_l^{-1}(t)$. Лемма доказана.

§ 3. Критерии (не-) осцилляционности линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и обобщенная теория перемежаемости Штурма

3.1. Свойства наборов точек флаговой кривой уравнения

Сначала опишем некоторые свойства наборов точек флаговой кривой неосцилляционного дифференциального уравнения.

3.1.1. Определение. Набор полных флагов в \mathbb{R}^n назовем общим, если для любого множества линейных подпространств, принадлежащих различным флагам, коразмерность их пересечения равна минимуму из n и суммы их коразмерностей.

3.1.2. Лемма. Уравнение (3) неосцилляционно на отрезке I тогда и только тогда, когда любой набор попарно различных точек ее флаговой кривой является общим.

Доказательство. Рассмотрим набор подпространств размерностей i_1, \dots, i_k для точек флаговой кривой уравнения (3) в моменты t_1, \dots, t_k . Напомним, что согласно определению флаговой кривой ее i -мерное подпространство в момент t двойственно подпространству решений уравнения, имеющих в момент t i -кратный корень. Согласно критерию неосцилляционности 3) (см. § 1.2) уравнение (3) неосцилляционно тогда и только тогда, когда существует и единственно решение любой многоточечной краевой задачи вида $x^{(j)}(t_i) = 0$, где $t_i \in I$, $j = \overline{0, m_i}$, $\sum_1^k (m_i + 1) = n$. Это в точности эквивалентно общности набора точек флаговой кривой в моменты t_1, \dots, t_k .

3.2. Критерий осцилляционности

3.2.1. Теорема. Флаговая кривая осцилляционного уравнения пересекает шлейф любого флага.

Доказательство будем проводить индукцией по порядку уравнения.

Основание индукции ($n = 2$). В этом случае $F_2 = S^1$, и шлейф любого флага совпадает с ним самим. Флаговая кривая $f\ell : I \rightarrow S^1$ любого уравнения обладает тем свойством, что $f\ell' \neq 0$ (условие неуплощаемости). Осцилляционность означает, что флаговая кривая проходит через некоторую точку пространства $F_2 = S^1$ два раза и, следовательно, полностью обходит окружность, попадая на шлейф любого флага, так как $f\ell' \neq 0$.

Шаг индукции. Пусть $pr: I \rightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$ — проективная кривая осцилляционного уравнения (см. Ш.И.И.2). Согласно замечанию 2 из Ш.И.И.1 осцилляционность эквивалентна наличию гиперплоскости L в $\mathbb{R}P^{n-1}$, которую pr пересекает $\geq n$ раз с учетом кратности. Пусть $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1})$ — произвольный полный флаг в $\mathbb{R}P^{n-1}$. В силу полунепрерывности кратности сверху при доказательстве будет рассмотрен случай, когда α трансверсален к L . Покажем, что найдется момент t , в который сопровождающие плоскости к pr станут нетрансверсальными к α .

Случай а). Если кривая pr пересекает плоскость α_{n-2} , то искомым момент нетрансверсальности получен.

Случай б). Если pr не пересекает α_{n-2} , то рассмотрим в гиперплоскости $\alpha_{n-2} = \mathbb{R}P^{n-2}$ полный флаг α_L , полученный пересечением (ограничением) флага α с гиперплоскостью L . (Так как по предположению α трансверсален к L , то α_L корректно определен.)

Спроектируем теперь кривую pr на α_{n-2} вдоль касательных прямых, т.е. точке кривой pr поставим в соответствие точку на α_{n-2} , получающуюся пересечением α_{n-2} с касательной прямой к pr в исходной точке. Несложная выкладка в аффинной карте показывает, что если pr — неуплощающаяся кривая в $\mathbb{R}P^{n-1}$, не пересекающая α_{n-2} , то pr_L — неуплощающаяся кривая на α_{n-2} .

(Если pr пересекает α_{n-2} , то при проекции в общем положении возникает полукубическая особенность.) Заметим, что флаговая кривая, соответствующая кривой pr , нетрансверсальна флагу α тогда и только тогда, когда флаговая кривая кривой pr_L нетрансверсальна флагу α_L . Докажем теперь, что кривая pr_L пересекает плоскость $L_\alpha = L \cap \alpha_{n-2}$ не менее $n-1$ раз с учетом кратности, что и завершит шаг индукции. Рассмотрим сначала случай кратных корней. Если pr пересекает L в момент t с некоторой кратностью (равной по определению максимальной размерности сопровождающего подпространства, лежащего в L), то pr_L пересекает L_α с кратностью, уменьшенной на единицу из-за одномерной проекции. Возьмем теперь на кривой pr два соседних геометрических различных корня $pr(t_i)$ и $pr(t_{i+1})$. Покажем, что на интервале (t_i, t_{i+1}) найдется момент τ_i , в который касательная прямая в точке $pr(\tau_i)$ пересекает плоскость L_α . Этот момент и будет корнем кривой pr_L (см. рис. 7). Плоскости L и α_{n-2} разбивают

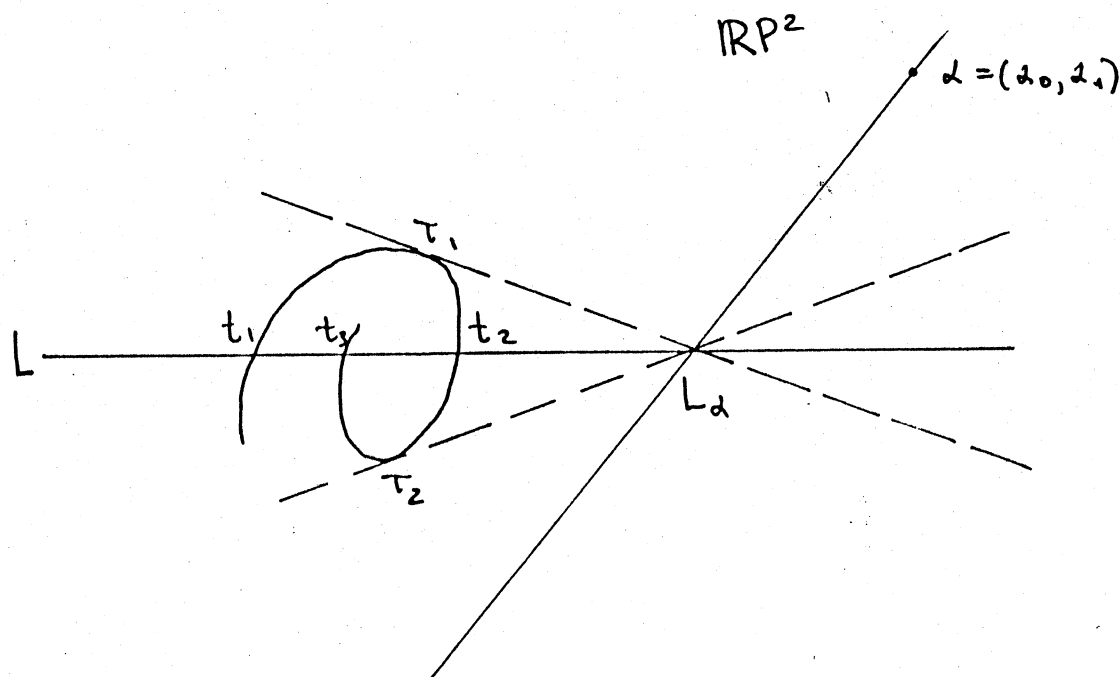


Рис. 7. Иллюстрация рассмотрения шага индукции.

исходное пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$ на два полупространства. Часть кривой pr на интервале (t_i, t_{i+1}) лежит в одном из них.

Выберем такую аффинную карту, в которой плоскость d_{n-2} будет бесконечно удаленной, а плоскость L — горизонтальной. Тогда момент, в который pr_L пересекает $L_d = L \cap d_{n-2}$, — это момент, когда касательная прямая к pr параллельна горизонтальной плоскости. Рассмотрим на части кривой pr на интервале (t_i, t_{i+1}) функцию расстояния до плоскости L . Эта функция обязательно имеет максимум во внутренней точке, так как на концах интервала она строго возрастает. В этой точке касательная прямая горизонтальна. Теорема доказана.

Замечание. Приведенное доказательство является, по существу, еще одним вариантом доказательства теоремы Ролля.

Докажем обратное утверждение.

3.2.2. Теорема. Если флаговая кривая пересекает шлейф любого флага, то уравнение осцилляционно.

Доказательство. Согласно основной переформулировке свойства неосцилляционности (см. § 1.2) нужно доказать, что флаговая кривая пересекает шлейф своего начального флага в какой-то момент, отличный от начального. По двойственности условие пересечения шлейфа любого флага эквивалентно тому, что объединение шлейфов точек флаговой кривой совпадает со всем F_V . Предположим от противного, что не найдется момента времени $t > a$, в который $f_l(a) \in \bigcup_{f \in \mathcal{F}(t)} \text{шлейф}(f)$. Покажем, что тогда найдется флаг $\alpha \in F_V$, который не содержится в объединении шлейфов точек флаговой кривой. Действительно, в наших предположениях для любого τ на полуинтервале $(a, b]$ существует ε_τ , такое что объединение шлейфов точек кривой f_l на отрезке $[\tau, b]$ не пересекается с ε_τ -окрестностью флага $f_l(a)$. С другой стороны, согласно лемме

Ш.2.8.2 на малом отрезке времени росток флаговой кривой находится одной из полугрупповых компонент дополнения до шлейфа флага $fl(a)$, и, следовательно, все его точки трансверсальны любому флагу из обратной полугрупповой компоненты. Тогда любой флаг из этой компоненты, находящийся в \mathcal{E}_τ -окрестности флага $fl(a)$, трансверсален ко всем флагам кривой fl . Это противоречие доказывает теорему.

3.2.3. Следствие. Уравнение (3) неосцилляционно на отрезке I тогда и только тогда, когда объединение шлейфов всех точек его флаговой кривой не совпадает с F_V .

3.3. Теория перемежаемости

Как указывалось во введении, в изучаемом варианте теории Штурма вместо нулей решений, т.е. пересечений флаговой кривой уравнения с младшей компонентой шлейфа флага, рассматривается ее пересечение со всем шлейфом, или нули вронскианов систем решений. Следствием теорем Ш.3.2.1 и Ш.3.2.2 является теорема перемежаемости довольно непривычного вида. Теорема Ш.3.2.1 утверждает, что если флаговая кривая пересекает I -ю компоненту шлейфа некоторого флага $\geq n$ раз (уравнение осцилляционно), то она пересекает шлейф любого флага. Но может быть флаговая кривая может пересекать другие компоненты шлейфов произвольно много раз, оставаясь неосцилляционной? Следующая теорема показывает, что это не так, и объясняет значение числа $n-1$ для I -й компоненты. Перед доказательством теоремы перемежаемости установим следующий результат.

3.3.1. Теорема. Суммарная кратность $\#_i$ пересечения флаговой кривой неосцилляционного уравнения (3) с i -й компонентой шлейфа любого флага не превосходит $i(n-i)$, а со всем шлейфом не превосходит $(n^2-n)/6$.

Доказательство. Пусть t_1, \dots, t_m — различные моменты не-
 трансверсальности точек флаговой кривой $f\ell$ неосцилляционного
 уравнения некоторому фиксированному флагу α , а $\#_{i,k}$ — крат-
 ность пересечения $f\ell$ с i -й компонентой шлейфа \mathbb{W}_α в момент
 t_k . Покажем, что $\sum_{k=1}^m \#_{i,k} \leq i(n-i)$. Действительно, из леммы
 Ш.3.1.2 следует, что набор флагов $f\ell(t_1), \dots, f\ell(t_m)$ об-
 щий, т.е. пересечение любого подмножества подпространств этих
 флагов имеет правильную размерность. По двойственности флаг α
 должен лежать в пересечении $\bigcap_{i=1}^m \mathbb{W}_{f\ell(t_i)}$. Известно, что кле-
 точные разбиения Шуберта любого грассманиана или пространства
 флагов, построенные по общему набору флагов, обладают свойством
 размерностей трансверсальности (см. [71]), т.е. коразмерность
 пересечения клеток этих разбиений равна сумме их коразмерностей.
 Рассмотрим m клеточных разбиений грассманианов $G_{i,n}$, $i = \overline{1, n-1}$,
 построенных по набору флагов $f\ell(t_1), \dots, f\ell(t_m)$. i -
 мерная плоскость флага α , являющаяся точкой $G_{i,n}$, лежит по
 лемме Ш.2.8.1 в клетке коразмерности $\#_{n-i,k}$ для k -го разби-
 ения. В силу размерностной трансверсальности $\sum_{k=1}^m \#_{n-i,k}$ не
 может превосходить $\dim G_{i,n} = i(n-i)$. В частности, еще раз по-
 лучаем, что число корней любого решения не может превосходить
 $n-1$. Суммируя размерности всех грассманианов, получаем, что
 кратность пересечения со шлейфом в пространстве флагов не мо-
 жет превышать $(n^3-n)/6$. Теорема доказана.

3.4. Докажем теперь обобщенные теоремы перемежаемости для
 обыкновенных уравнений.

3.4.1. Следствие. Если на некотором отрезке времени I
 флаговая кривая пересекает i -ю компоненту шлейфа некоторого

флага более чем $i(n-i)$ раз (с учетом кратности), то она пересекает шлейф любого флага.

Доказательство. Действительно при выполнении этого условия уравнение осцилляционно на Γ . Следовательно, его флаговая кривая пересекает шлейф любого флага.

3.4.2. Следствие (обобщенная перемежаемость). Для любого линейного дифференциального уравнения n -го порядка для положительных кратностей $\#_\alpha$ и $\#_\beta$ пересечения флаговой кривой со шлейфами \mathcal{W}_α и \mathcal{W}_β выполнено неравенство

$$\frac{6}{n^3 - n + 6} \leq \frac{\#_\alpha}{\#_\beta} \leq \frac{(n^3 - n + 6)}{6}.$$

Доказательство получается суммированием размерностей грасманианов $G_{i,n}$ по i .

Замечание. Несложные примеры показывают, что для общих линейных обыкновенных дифференциальных уравнений модуль разности

$|\#_\alpha - \#_\beta|$ не ограничен, а ограничено именно отношение. Так, если рассмотреть уравнения $\ddot{x} - k^2 x = 0$ на отрезке $[0, 2\pi]$ для разных k , то соответствующая неуплощающаяся кривая на $\mathbb{R}P^2$ является k -кратно пройденной окружностью (см. рис. 8). Число мо-

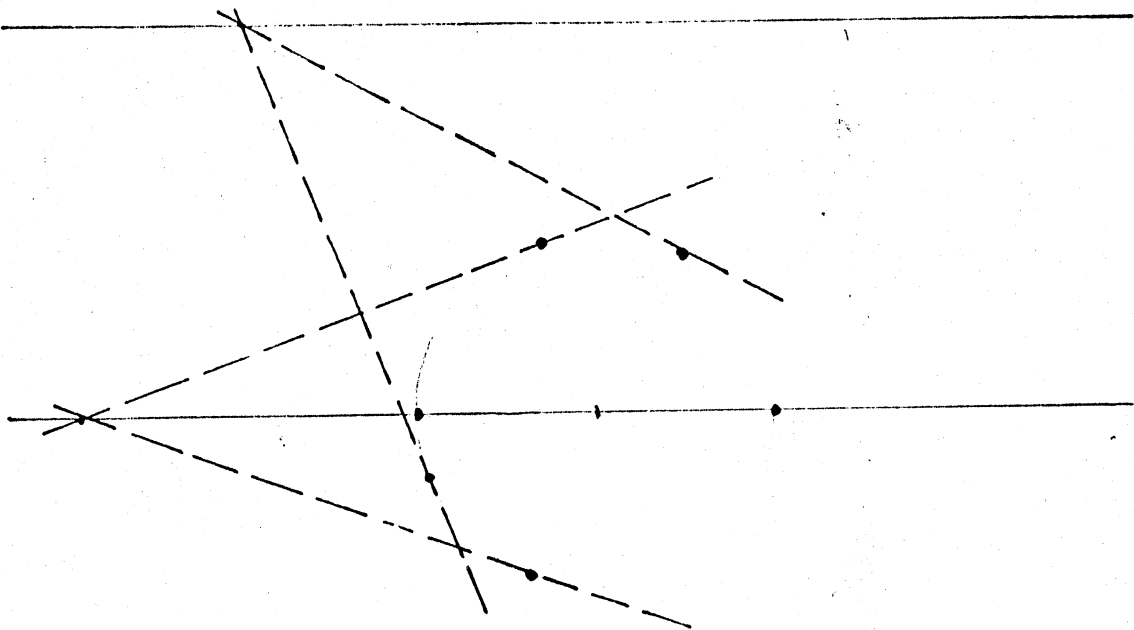


Рис.8. Пример неограниченности $|\#_\alpha - \#_\beta|$.

ментов нетрансверсальности флагу α равно $2k$, а к флагу β — $4k$.

§ 4. Особенности областей неосцилляционности и особенности сечений шлейфов

4.1. Критерий принадлежности уравнения границе области неосцилляционности

Теорема. Уравнение (3) лежит на границе области неосцилляционных уравнений тогда и только тогда, когда единственной парой нетрансверсальных флагов ее флаговой кривой являются начало и конец.

Доказательство ее легко вытекает из следующего факта.

4.2. Теорема (ср. [86]). Пусть уравнение (3) имеет осцилляционное решение на полуинтервале $[a, b)$, тогда оно имеет осцилляционное решение с $\geq n$ простыми нулями на интервале (a, b) .

Дадим топологическое доказательство сформулированной теоремы, опирающееся на ряд лемм.

Определение. Пусть $p\gamma: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}P^l$ — росток неуплощающейся кривой. Назовем ростком ее области гиперболичности росток множества точек в $\mathbb{R}P^l$, таких что через каждую из них проходит гиперплоскость, имеющих с ростком кривой $p\gamma$ простое касание (см. рис. 9).

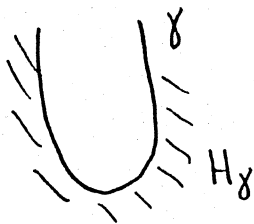


Рис. 9. Росток области гиперболичности

Нетрудно показать, что область гиперболичности ростка неуплощающейся кривой в $\mathbb{R}P^l$ диффеоморфна произведению ростка $(l-1)$ -мер-

ной пирамиды ласточкина хвоста на интервал. (Напомним, что $(l-1)$ -мерной пирамидой ласточкина хвоста называется множество многочленов вида $x^l + a_1 x^{l-2} + \dots + a_{l-1}$, имеющих l простых вещественных корней (см. [12].)

4.2.1. Лемма. Любая гиперплоскость L , пересекающая росток неуплощающейся кривой с любой кратностью, пересекает область гиперболичности.

Для доказательства нам потребуется следующий результат.

4.2.2. Определение. Воротником ростка неуплощающейся кривой pr называется росток гладкой двумерной поверхности Γ , образованной положительными полукасательными к pr . Полукасательная называется положительной, если она содержит касательный вектор (который определен, так как pr — параметризованная кривая). Краем воротника назовем кривую, образованную концами касательных векторов длины ε .

4.2.2. Лемма. Если кратность пересечения плоскости L с кривой pr четна, то половина края воротника, соответствующая отрицательному времени для заданной параметризации, и сама кривая pr лежат по разные стороны от L (см. рис. 10).

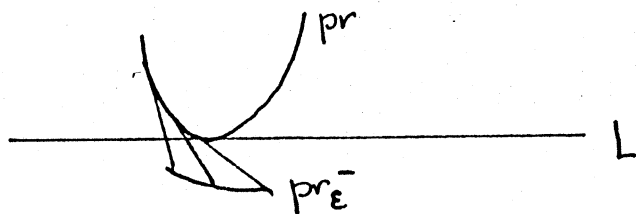


Рис.10. Расположение проективной кривой и края воротника.

Доказательство. Выберем такую аффинную систему координат, в которой росток pr параметризуется стандартным образом:

$$pr_1(t) = t + \dots, \quad pr_2(t) = t^2/2 + \dots, \quad \dots, \quad pr_k(t) = t^{2k}/2k! + \dots, \quad pr_l(t) = \frac{t^l}{l!} + \dots$$

где многоточие обозначает члены более высокого порядка. Пусть подпространство, натянутое на первые $2k-1$ координат, лежит в L , а направление e_{2k} трансверсально плоскости L . Тогда локально $2k$ -я координата точек кривой положительна. Край воротника параметрически задается в виде

$$pr_{\varepsilon}(t) = pr(t) + \varepsilon pr'(t).$$

Его $2k$ -я координата имеет вид

$$pr_{\varepsilon, 2k}(t) = \varepsilon t^{2k-1}/(2k-1)! + t^{2k}/2k! + \dots$$

Легко видеть, что при малых отрицательных t координата $pr_{\varepsilon, 2k}$ отрицательна. Следовательно, pr и pr_{ε} лежат по разные стороны от плоскости L . Лемма доказана.

Доказательство леммы Ш.4.2.1.

а) Если кратность пересечения pr с плоскостью L нечетна, т.е. pr локально переходит из одной компоненты дополнения до L в другую, то мало пошевелив pr , получим C^1 -близкий к pr росток кривой \overline{pr} , целиком лежащий в области гиперболичности и пересекающий L . Эта точка пересечения и является искомой.

б) Если кратность пересечения кривой pr с L четна, то pr лежит по одну сторону от L . Из леммы Ш.4.2.2 и того, что воротник Γ лежит в замыкании области гиперболической кривой следует, что и в этом случае существует кривая, целиком лежащая в области гиперболичности и переходящая со стороны на сторону относительно L , что и завершает доказательство леммы Ш.4.2.1.

Теперь мы в состоянии доказать теорему Ш.4.2.

Пусть уравнение (3) осцилляционно на полуинтервале $[a, b-\varepsilon)$. Рассмотрим осцилляционное решение φ . предположим, что φ имеет в точке $a' > a$ k -кратный корень и в точке $b' < b$ l -кратный корень ($k+l \geq n$), причем l - максимальная кратность, которую могут

иметь в точке b' осцилляционные решения уравнения (3). Покажем, что существует решение уравнения (3), имеющее в точке a' корень кратности $\geq n - \ell$ и в окрестности точки b' ℓ простых корней. Рассмотрим в $(\ell + 1)$ -мерном линейном подпространстве решений уравнения (3), имеющих в точке b' корень кратности $\leq \ell$, гиперплоскость решений, имеющих в точке a' корень кратности $\geq n - \ell$, и неуплощающуюся кривую, полученную проектированием на рассматриваемое подпространство аффинной кривой уравнения. По лемме Ш.4.2.1 на этой гиперплоскости найдется точка из области гиперболичности этой кривой, которая и является решением с $\geq (n - \ell)$ -кратным корнем в точке a' и ℓ простыми корнями в окрестности точки b' . Малым возмущением этого решения строится искомое решение с $\geq n$ простыми корнями на (a, b) . Случай более чем двух корней рассматривается аналогично.

Перейдем к доказательству теоремы Ш.4.1. Из условия теоремы вытекает, что осцилляционные решения уравнения, принадлежащего границе области неосцилляционности, должны обращаться в нуль на концах отрезка. Действительно, предположим, что нашлось решение, осцилляционное на полуинтервале $[a, b - \varepsilon)$. Тогда по теореме Ш.4.2 нашлось бы решение с $\geq n$ простыми корнями на (a, b) . Любое достаточно малое возмущение такого уравнения было бы осцилляционным, так как простые корни при малом возмущении не исчезают, что противоречит принадлежности границе области неосцилляционности.

4.3. Особенности границы области неосцилляционности и шлейфы

Теорема. Особенности границы области неосцилляционных уравнений, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах, диффеоморфны особенностям типичных k -параметрических сечений шлейфа.

Доказательство. Рассмотрим флаговую кривую уравнения, принадлежащего границе области неосцилляционности. Согласно теореме Ш.4.1 имеем $f_l(\theta) \in W f_l(a)$. По лемме Ш.1.3.1 концевое отображение является субмерсией и, следовательно, концевое отображение типичного семейства уравнений задает типичное сечение в пространстве F_n в окрестности рассматриваемой точки $f_l(\theta)$. Тем самым, задача изучения типичных особенностей границы неосцилляционности сведена к задаче изучения типичных особенностей сечений шлейфов.

4.4. Свойства типичных сечений шлейфа

Теорема. Особенности типичных k -параметрических сечений шлейфа обладают следующими свойствами:

- а) они не меняются (с точностью до диффеоморфизма) вдоль клеток разбиения Шуберта;
- б) при любых k и n список типичных особенностей может быть задан явными формулами, он конечен (т.е. не имеет модулей);
- в) списки типичных особенностей k -параметрических сечений растут с ростом размерности n пространства и стабилизируются при $n \gg 2k$.

Доказательство. Утверждение а) следует из свойств действия группы GL_n на пространстве флагов. Стабилизатор любого флага сохраняет построенное по этому флагу разбиение Шуберта и транзитивно действует на каждой его клетке, что и доказывает диффеоморфность трансверсалий во всех точках клетки.

Для доказательства б) построим явным образом трансверсалии ко всем клеткам разбиения Шуберта положительной коразмерности. Возьмем для каждой клетки соответствующую ей перестановку. Коразмерность клетки в F_n равна числу упорядоченностей этой перестановки (т.е. числу пар (i, j) , где $i < j$ и i стоит в перестановке раньше j). Зададим следующую деформацию Φ матрицы

рассматриваемой перестановки в группе GL_n . Для каждой пары ее единичных элементов, образующих упорядоченность ($s_{ik} = s_{jl} = 1, i < j$ и $k < l$), поставим на место (i, l) параметр деформации

$\lambda_{i,l}$.

Пример. Для матрицы $\begin{vmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{vmatrix}$ перестановки $(1, 3, 2)$ деформация Φ имеет вид

$$\begin{vmatrix} I & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ 0 & 0 & I \\ 0 & I & 0 \end{vmatrix}.$$

(матрица перестановки записывается по столбцам).

Рассмотрим введенное в Ш.2.3.1 расслоение $\nu: GL_n \rightarrow F_n$. Покажем, что проекция указанной выше деформации определяет трансверсаль к соответствующей этой перестановке клетке Шуберта. Во-первых, число параметров равно коразмерности клетки. Во-вторых, покажем, что векторы $\partial\Phi/\partial\lambda_{ij}$ не касаются полного прообраза клетки в GL_n , и, следовательно, определяют трансверсаль после проектирования. Полный прообраз клетки, соответствующей матрице перестановки S , является множеством матриц, представимых в виде $\tau_1 S \tau_2$, где τ_1 и τ_2 невырожденные нижнетреугольные матрицы. Алгеброй Ли \tilde{T} группы T невырожденных нижнетреугольных матриц является алгебра Ли всех нижнетреугольных матриц. Касательное пространство к прообразу $T S T$ раскладывается в сумму пространств $\tilde{T} S$ и $S \tilde{T}$. При левом умножении матрицы $\tau \in \tilde{T}$ на матрицу перестановки S столбцы матрицы τ переставляются так: i -й столбец ставится на место, на котором стоит в перестановке число i . При правом умножении строки матрицы τ переставляются так: j -я строка матрицы τ переставляется на место, номер которого равен числу, стоящему на j -м месте в перестановке. Легко видеть, что при этом получается линейное пространство матриц, имеющих нули на всех местах, образующих упорядоченность и произвольные

элементы на остальных (см. пример ниже).

Пример матрицы, определяющей касательное пространство к орбите перестановки (3.1.4,2)

$$\left| \begin{array}{cccc} * & * & 1 & 0 \\ * & 0 & * & 0 \\ * & * & * & 1 \\ * & 1 & * & * \end{array} \right|$$

Уравнение ограничения шлейфа на деформацию по-прежнему имеет вид

$$\Delta_1 \cdot \dots \cdot \Delta_{n-1} = 0,$$

где Δ_i — i -й правый главный минор, в котором переменные стоят только на местах, образующих упорядоченность. Описанный способ построения трансверсали позволяет для любых фиксированных k и n задать (с точностью до диффеоморфизма) особенности k -параметрических сечений шлейфа в F_n явными формулами. Для этого следует выписать все перестановки на n элементах с k упорядоченностями, для каждой из них проставить в матрице перестановок параметры деформации на местах, образующих упорядоченность, и перемножить определители правых главных миноров.

Докажем п. в) о стабилизации. отождествим \mathbb{R}^n с n -мерным подпространством L_n в \mathbb{R}^m , натянутом на первые n векторов некоторого базиса e_1, \dots, e_m . Построим теперь отображение из открытого подмножества $Q_{m,n}$ в F_m на F_n : Пусть $Q_{m,n}$ — подмножество флагов в F_m , трансверсальных L_n . Сопоставим флагу $f \in Q_{m,n}$ флаг $f_L \in F_n$, получающийся пересечением f с L_n . Тем самым, мы отобразим клеточное разбиение, построенное по прямому флагу базиса e_1, \dots, e_m , в клеточное разбиение, построенное по

прямому флагу базиса e_1, \dots, e_n . Это отображение сохраняет коразмерности клеток и переводит трансверсали в клетки в трансверсали и задает вложение списков особенностей сечений шлейфов при фиксированном k и росте n . Докажем свойство стабилизации. Рассмотрим матрицу перестановки $S \in S_n$ и приведенную выше деформацию Φ . Пусть существует i , такое что в перестановке S число i стоит на $(n-i)$ -м месте. Тогда соответствующий единичный элемент матрицы не может образовывать упорядоченность ни с одним элементом матрицы S . Следовательно, если удалить его из перестановки S , сделав соответствующий сдвиг номеров, то получится перестановка S' из группы S_{n-1} , задающая в F_{n-1} клетку той же коразмерности с диффеоморфным пересечением трансверсали со шлейфом. Тем самым, на подстановках с разным числом элементов возникает отношение эквивалентности, не меняющее коразмерностей клеток, типов особенностей и т.д. При изучении особенностей, встречающихся в типичных k -параметрических семействах, следует рассмотреть трансверсали ко всем клеткам коразмерности k (равной числу упорядоченностей соответствующей матрицы перестановок). Но любая перестановка с k упорядоченностями стабильно эквивалентна перестановке, действующей на не более чем $2k$ элементах, что и завершает доказательство.

4.5. Явный вид особенностей для $k \leq 4$

Ниже мы для удобства заменим упорядоченности на беспорядки и главные правые миноры на главные миноры.

4.5.1. Лемма. а) Любая перестановка с двумя беспорядками стабильно эквивалентна одной из трех перестановок $(2,1,4,3)$, $(3,1,2)$ или $(2,3,1)$.

Соответствующие деформации Φ имеют вид

$$\left\| \begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} \lambda & 1 & 0 \\ \mu & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\| \quad \text{или} \quad \left\| \begin{array}{ccc} \lambda & \mu & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Уравнение особенности шлейфа во всех случаях имеет вид $\lambda\mu = 0$.

б) Любая перестановка с тремя беспорядками стабильно эквивалентна одной из следующих: (3,2,1), (4,1,2,3), (2,3,4) или (2,1,4,3,6,5).

Соответствующие деформации Φ имеют вид

$$\left\| \begin{array}{ccc} \lambda & \mu & 1 \\ \nu & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccc} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \mu & 0 & 1 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccc} \lambda & \mu & \nu & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{cccccc} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \nu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|.$$

Уравнения особенностей шлейфа имеют вид

$$\lambda(\lambda - \mu\nu) = 0 \quad \text{в первом случае,}$$

$$\lambda\mu\nu = 0 \quad \text{в трех последних.}$$

в) Уравнения особенностей с 4 беспорядками имеют вид

$$\lambda\mu\nu\eta = 0 \quad \text{и} \quad \lambda\eta(\lambda - \mu\nu) = 0.$$

§ 5. Неосцилляционные линейные гамильтоновы системы и особенности областей неосцилляционности

5.1. Описание классов гамильтоновых систем и их свойств

В этом параграфе изучаются особенности границы областей неосцилляционности, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах следующих 4-х классов линейных гамильтоновых систем:

а) локально неосцилляционных, т.е. систем, заданных на

$I = [a, b]$, для которых росток траектории ψ_{ν_p} лагранжевой плоскости p , задаваемой условием $(q=0)$, в окрестности точки a не лежит на шлейфе \mathcal{W}_p плоскости p (см. § 1.3).

б) p - положительных систем, т.е. систем, для которых ограничение гамильтониана на лагранжеву плоскость p является положительно определенным на всем отрезке времени;

в) положительных систем, т.е. систем, для которых ограничение гамильтониана на любую лагранжеву плоскость является положительно определенным;

г) линейных вариационных уравнений, т.е. систем, полученных преобразованием Лежандра из линейных самосопряженных дифференциальных уравнений.

Докажем две леммы, характеризующие системы классов а) и г).

5.1.1. Лемма. Система принадлежит классу а) тогда и только тогда, когда в некоторой окрестности точки a столбцы матрицы $Q^{-1}(t)C(t)$ линейно независимы, где $Q(t)$ - фундаментальная система решений матричного уравнения $\dot{q} = B(t)q$.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что условия леммы выполнены, а система не принадлежит классу а), т.е. существует ее ненулевое решение $(p(t), q(t))$, такое, что $q \equiv 0$ на некотором отрезке $[a, \beta]$. Тогда из (4) следует, что

$$\begin{cases} C(t)p(t) = 0, \\ \dot{p} = -B^T(t)p. \end{cases}$$

Фундаментальным решением второго из уравнений системы является $(Q^{-1})^{-1}$, и любое решение записывается в виде $p(t) = (Q^{-1})^{-1} \xi$, где ξ - некий вектор. Подставляя это выражение в первое уравнение, получим, что $\xi^T (Q^{-1}(t)C(t)) = 0$. Если $Q^{-1}(t)C(t)$

невырождена, то $\xi = 0$. Следовательно, $p(t) \equiv 0$. Рассматриваемое решение тождественно равно нулю, что противоречитсылке. Это рассуждение легко проводится в обратную сторону. Лемма доказана.

5.1.2. Лемма. Линейный самосопряженный дифференциальный оператор представляется в виде $L_{2n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k [q_k(t) x^{(k)}]^{(k)}$.

Матрицы соответствующей гамильтоновой системы имеют вид

$$A(t) = -\text{diag} [q_0(t), \dots, q_{n-1}(t)],$$

$$C(t) = \text{diag} [0, \dots, 0, 1],$$

а B — стандартная жорданова $(n \times n)$ -клетка с нулевой диагональю.

Доказательство проведем по индукции. Случай $n = 2$ очевиден. Проверим первую часть леммы, так как вторая является проверкой определения преобразования Лежандра при переходе от уравнения к системе. Пусть оператор $L_m = q_m(t) x^{(m)} + \dots + q_1(t) x' + q_0(t) x$ совпадает со своим сопряженным $L_m^* = (-1)^m [q_m(t) y]^{(m)} + (-1)^{m-1} [q_{m-1}(t) y]^{(m-1)} + \dots$. Выполняя дифференцирование, получаем, что $(-1)^m = 1$, т.е. $m = 2n$. Тогда по формуле Лейбница имеем следующее уравнение для коэффициента q при $x^{(m-1)}$

$$2n q'_{2n} - q_{2n-1} = q_{2n-1} \Rightarrow q'_{2n} = n q_{2n}.$$

Вычитая из оператора L_m оператор $[q_{2n} x^{(2n)}]^{(2n)}$, получим самосопряженный оператор порядка не выше $m-2$, что и завершает шаг индукции.

5.2. Особенности границы областей неосцилляционности

Напомним некоторые сведения о шлейфе \mathcal{W}_p в лагранжевом пространстве \mathcal{L}_n (см., например, [7]). Множество лагранжевых плоскостей, трансверсальных какой-нибудь лагранжевой плоскости p , естественно отождествляется с пространством квадратичных

форм на \mathbb{R}^n . При этом шлейф плоскости \mathcal{A} , которую можно считать нулевой квадратичной формой, совпадает с множеством всех вырожденных квадратичных форм. Шлейфы всех других точек получаются из шлейфа нуля параллельным переносом. Шлейф в пространстве квадратичных форм определяет однородную нестрого гиперболическую гиперповерхность, конусом времениподобных векторов которой служит конус положительно определенных квадратичных форм. Параллельный перенос этого конуса определяет во всем пространстве Λ_n поле положительных конусов. Шлейф имеет естественную стратификацию на орбиты действия группы GL_n . Орбиты нумеруются количеством положительных, отрицательных и нулевых квадратов квадратичной формы. К размерности орбиты равна $\ell(\ell+1)/2$, где ℓ — число нулевых квадратов. Трансверсаль к такой орбите естественно отождествляется с пространством квадратичных форм на \mathbb{R}^ℓ .

5.2.1. Теорема. Особенности границы областей неосцилляционности, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах систем любого из 4-х классов, диффеоморфны особенностям типичных k -параметрических сечений шлейфа.

Доказательство теоремы легко вытекает из следующей леммы.

Определение. Концевым отображением $\lambda: LEQ_n \rightarrow \Lambda_n$ пространства линейных гамильтоновых систем в лагранжевы грассманиан назовем отображение, сопоставляющее системе конец ее лагранжевой кривой.

5.2.2. Лемма. Отображение λ является субмерсией во всех 4-х классах систем, т.е. для любой системы из некоторого класса существует $n(n+1)/2$ -параметрический росток ее деформации в этом классе, который невырожденно проектируется отображением

на некоторую окрестность образа рассматриваемой системы.

Доказательство. Опишем распределения в $T\Lambda_n$, которым принадлежат вектора скоростей траекторий tr_p для каждого из рассматриваемых 4-х классов систем. Вектор скорости движения некоторой лагранжевой плоскости в аффинной карте, изоморфной квадратичным формам, отождествляется с ограничением гамильтониана на эту плоскость (см. [7]). Траекторией tr_p для системы класса а) может быть любая кривая, не лежащая на шлейфе Ψ_p в окрестности момента a . Траекторией tr_p для системы класса б) может быть любая кривая, вектор скорости которой принадлежит полю положительных конусов, если точка кривой находится на Ψ_p . Траекторией tr_p для системы класса в) может быть любая кривая, вектор скорости которой принадлежит полю положительных конусов во всех точках. Допустимые вектора скоростей для tr_p систем класса г) получаются ограничением на лагранжевы плоскости гамильтонианов вида $Aq^2 + 2Bpq + p^2$, где A - диагональная матрица, B - стандартная жорданова клетка, а в матрице C отличен от нуля только элемент C_{nn} . Легко заметить, что линейные оболочки всех указанных распределений конусов неголономны, и, следовательно, ростки областей достижимости при фиксированной начальной точке и векторе скорости во всех случаях являются открытыми (см. [77]). Тем самым, для любой допустимой кривой можно построить ее $n(n+1)/2$ -параметрическую деформацию, такую, что семейство концов диффеоморфно накрывает маленький шар с центром в концевой точке исходной кривой.

Доказательство теоремы непосредственно вытекает из предыдущей леммы. Осталось показать, что в качестве особенностей границы неосцилляционности реализуются трансверсали ко всем клеткам.

Для этого заметим, что все клетки примыкают к вершине шлейфа

\mathcal{W}_p - точке p - и в каждом из 4-х классов легко указать систему, для которой tr_p , выходя из точки p , вновь в нее возвращается. Малым возмущением такой системы получаем систему, лагранжева траектория которой пересекает любой страт.

§ 6. Простейшие особенности областей неосцилляционности, встречающиеся в семействах гамильтоновых систем в пространстве (t, λ)

Рассмотрим росток траектории $tr_p: [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow \Lambda_n$ линейной гамильтоновой системы (4) в окрестности точки из \mathcal{W}_p . Далее, в силу локальности рассмотрений заменим пространство Λ_n на пространство $S\text{Mat}_N$, а \mathcal{W}_p - на $S\Delta_N$. Изучим росток кривой $tr_p: (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (S\text{Mat}_N, S\Delta_N)$. Как и в параграфах II.4 и II.5, рассмотрим действие на tr_p группы право-левых замен $\mathcal{O}_{S\Delta_N}$, сохраняющих $S\Delta_N$, и трансверсаль к орбите $\mathcal{O}_{S\Delta_N} tr_p$. Согласно упоминавшимся результатам Дамона [68] эта трансверсаль является версальной деформацией отображения tr_p в классе диффеоморфизмов, сохраняющих $S\Delta_N$. В расширенном пространстве параметров версальной деформации $(t, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ с выделенной структурой одномерного расслоения по t однозначно (с точностью до расслоенного диффеоморфизма) определен прообраз поверхности $S\Delta_N$, являющейся границей области неосцилляционности при рассмотрении семейств с выделенным временем. Приведем простейшие ответы, непосредственно вытекающие из результатов § II.5.

6.1. Теорема. Особенности границы области неосцилляционности, встречающиеся в типичных k -параметрических семействах систем 2-го порядка классов а)-в) с гладкой лагранжевой траекторией tr_p , расслоено диффеоморфны следующим гиперповерхностям:

1) если кривая tr_p касается $S\Delta_2$ в гладкой точке -

$$t^{k+1} + \lambda_1 t^{k-1} + \dots + \lambda_k = 0; \quad (22)$$

2) если кривая проходит через вершину конуса -

$$t^k + \lambda_1 t^{k-1} + \dots + \lambda_{k-1} t - \lambda_k^2 = 0. \quad (23)$$

Доказательство. Действительно, в случае а) росток матричной кривой регулярен, и, согласно следствию II.5.1.2, версальная деформация в этом случае совпадает с V -версальной деформацией ограничения функции \det на кривую. Функция \det имеет на tr_p нуль порядка k , и пересечение кривых с $S\Delta_2$ задается уравнением (22). Версальная деформация для случая б) выписана в доказательстве случая I теоремы II.5.2. Для получения формулы (23) остается только написать прообраз конуса в координатах $(t, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$.

§ 7. Некоторые свойства наборов шлейфов в грассманианах и пространствах флагов

Ниже будут приведены некоторые результаты, связывающие топологию объединения наборов шлейфов и его комплексификации.

7.1. Теорема. Для типичного набора флагов в \mathbb{R}^3 множество $F^{\mathbb{R}}$ всех флагов, трансверсальных ко всем флагам набора, является вещественно алгебраическим M -многообразием, т.е. удовлетворяет соотношению $\sum b_i(F^{\mathbb{R}}) = \sum b_i(F^{\mathbb{C}})$, где b_i - числа Бетти с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, а $F^{\mathbb{C}}$ - комплексификация $F^{\mathbb{R}}$.

(Условия типичности в формулируемых теоремах см. ниже.)

Напомним, что для любого вещественно алгебраического многообразия $M^{\mathbb{R}}$ и его комплексификации $M^{\mathbb{C}}$ выполняется неравенство Смита: $\sum b_i(M^{\mathbb{R}}) \leq \sum b_i(M^{\mathbb{C}})$.

Теорема 7.1 является следствием двух теорем.

7.2. Теорема. (В.И. Арнольд, В.И. Костов). Для типичного

набора из k флагов в \mathbb{R}^3 многообразии $F^{\mathbb{R}}$ всех флагов, трансверсальных всем флагам набора, гомеоморфно несвязному объединению $k^3 - k^2 + k$ трехмерных клеток.

7.3. Теорема. (Б.З. Шапиро). Для типичного набора из k флагов в \mathbb{C}^3 многообразии $F^{\mathbb{C}}$ всех флагов, трансверсальных всем флагам набора, не имеет кручения в целочисленных гомологиях, и его числа Бетти таковы: $b_0 = 1$, $b_1 = 2(k-1)$, $b_2 = 2(k-1)^2$, $b_3 = 2(k-1)^3$, $b_i = 0$ при $i \geq 4$.

Ниже мы рассмотрим эквивалентную интерпретацию полных флагов в \mathbb{R}^3 как полных флагов на $\mathbb{R}P^2$.

Определение. Каждый флаг на $\mathbb{R}P^2$ состоит из прямой и точки. Бифуркационными линиями назовем прямые, соединяющие пары точек флагов.

Условия типичности набора полных флагов на $\mathbb{R}P^2$:

- а) флаги попарно трансверсальны;
- б) никакие три прямые флагов не пересекаются в одной точке;
- в) никакие три точки флагов не лежат на одной прямой;
- г) никакая бифуркационная линия не проходит через точку пересечения флагов.

7.4. Вещественный случай

Доказательство теоремы Ш.7.2. Зафиксируем типичный набор из проективных флагов $\hat{\mathcal{L}} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$. Прямые флагов набора разбивают $\mathbb{R}P^2$ на $N_1 = k(k-1)/2 + 1$ открытых многоугольников (см. условие б). Обозначим один из них через M . Рассмотрим множество $\mathcal{Q}(M)$ флагов, трансверсальных к $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, точка которых лежит в M . $\mathcal{Q}(M)$ является расслоением со слоинтервал, базой которого является множество Θ прямых, пересекающих M и не проходящих через точки флагов $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Обозначим через l_1, \dots, l_k прямые на $(\mathbb{R}P^2)^*$, двойственные

к точкам флагов набора $\hat{\mathcal{L}}$. Прямые l_1, \dots, l_k находятся в общем положении (см. условие в)).

7.4.1. Определение. Двойственным многоугольником M^* к многоугольнику M на $\mathbb{R}P^2$ назовем многоугольник на $(\mathbb{R}P^2)^*$, точки которого двойственны прямым, не пересекающим M .

Если M — выпуклый и аффинный (т.е. помещается в аффинную плоскость), то M^* — также выпуклый и аффинный. Если M — открытый, то M^* — замкнутый, и наоборот.

Имеем: $\Theta = (\mathbb{R}P^2)^* \setminus (M^* \cup l_1 \cup \dots \cup l_k)$. Все прямые l_1, \dots, l_k пересекают замыкание M^* .

7.4.2. Лемма. Θ состоит из $k + q(M)$ открытых двумерных клеток, где $q(M)$ — число бифуркационных линий, пересекающих M .

Следствие. $\mathcal{L}(M)$ состоит из $k + q(M)$ открытых трехмерных клеток.

Доказательство леммы непосредственно вытекает из следующего более общего предложения.

7.4.3. Предложение. Пусть ω — нестрого выпуклая область на $\mathbb{R}P^2$. Число частей, на которое $\omega' = \mathbb{R}P^2 \setminus \bar{\omega}$ разбивается прямыми в общем положении, каждая из которых пересекает $\bar{\omega}$, равно $k + v$, где v — число их точек попарных пересечений, лежащих в ω' . Все части, на которые распадается ω' , стягиваемы.

Доказательство. Для $k = 1$ лемма очевидна. Пусть она доказана для $k-1$, и $\bar{\omega}'$ пересекается с k -й прямой по отрезку (или точке) δ . Точка пересечения l_k с остальными прямыми, лежащими в ω' , разбивают $l_k \setminus \delta$ на $\nu + 1$ интервалов, где ν — число этих точек. Каждый из этих интервалов является простым путем, соединяющим две точки границы стягиваемой (по предположению индукции) области. Следовательно, добавление прямой l_k увеличивает число частей, на которое распадается ω' , ровно на $\nu + 1$.

Стягиваемость этих компонент очевидна.

Общее число N_3 компонент связности множества $F^{\mathbb{R}}$ получается суммированием числа компонент множеств $\mathcal{Q}(M)$ по всем многоугольникам M . Следовательно, N_3 равно $kN_1 + N_2$, где N_2 — общее число частей, на которой бифуркационные линии разбиваются прямыми флагами. В силу условий а) и г) $N_2 = k^2(k-1)/2$. Следовательно, $N_3 = k^3 - k^2 + k$. Теорема доказана.

7.5. Комплексный случай

Докажем теорему Ш.7.3.

В трехмерном случае уравнения компонент шлейфа в \mathbb{C}^3 имеют вид

$$z = 0, \quad z = xy \quad (24)$$

7.5.1. Определение. Пусть $\hat{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ — произвольный набор полных флагов в \mathbb{C}^n . Обозначим через $\overline{\mathcal{W}}(\hat{\alpha})$ одноточечную компактификацию множества $\mathcal{W}(\hat{\alpha}) = \bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{W}(\alpha_i) \cap (F_n \setminus \mathcal{W}(\alpha_k))$,

а через $F(\hat{\alpha})$ — дополнение $F_n \setminus \bigcup_{i=1}^k \mathcal{W}(\alpha_i)$.

7.5.2. Лемма. $\tilde{H}_{i-1}(F(\hat{\alpha})) = \tilde{H}^{n(n-1)-i}(\overline{\mathcal{W}}(\hat{\alpha}))$.

Доказательство. $F_n \setminus \mathcal{W}(\alpha_k)$ является клеткой вещественной размерности $n(n-1)$. По двойственности Александера (см. [29]) имеем:

$$\tilde{H}_{i-1}(F(\hat{\alpha})) = H_c^{n(n-1)-i} \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \mathcal{W}(\alpha_i) \cap (F_n \setminus \mathcal{W}(\alpha_k)) \right) = H_c^{n(n-1)-i}(\overline{\mathcal{W}}(\hat{\alpha})),$$

где \tilde{H}_j и H_c^j обозначают приведенные гомологии и когомологии с компактными носителями соответственно. Имеем:

$$H_c^{n(n-1)-i}(\overline{\mathcal{W}}(\hat{\alpha})) = H^{n(n-1)-i}(\overline{\mathcal{W}}(\hat{\alpha}), \infty) = \tilde{H}^{n(n-1)-i}(\overline{\mathcal{W}}(\hat{\alpha})),$$

где ∞ обозначает компактифицирующую точку.

Для вычисления $\tilde{H}^*(\overline{W}(\alpha))$ воспользуемся спектральной последовательностью Майера-Виеториса (см. [15]). В силу замкнутости $W(\alpha_i)$ в $\overline{W}(\alpha)$ условия для ее применимости выполнены.

7.5.3. Лемма. Каждая из компонент $W(\alpha)$ в \mathbb{C}^3 биголоморфно эквивалентна \mathbb{C}^2 . Компоненты пересекаются по паре комплексных прямых, пересекающихся в точке.

Доказательство. См. формулу (24).

Следствие. Группы когомологий компактифицированного шлейфа не имеют кручений, а его числа Бетти равны $1, 0, 1, 2, 2$.

Когомологии легко вычисляются из точной последовательности Майера-Виеториса.

7.5.4. Лемма. Компактифицированный точкой комплекс пересечения $\overline{W}(\alpha_1) \cap \overline{W}(\alpha_2)$ гомеоморфен комплексу, изображенному на рис. II, и гомотопически эквивалентен букету из 4-х сфер S^2 и 6-ти окружностей.

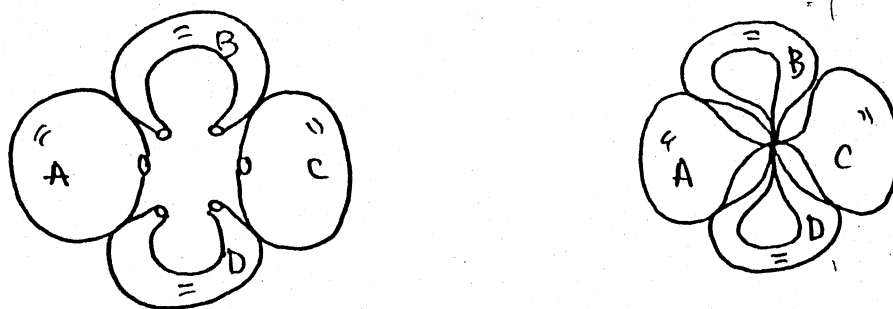


Рис. II. Некомпактифицированное и компактифицированное пересечение двух шлейфов в \mathbb{C}^3 .

Доказательство. Опишем геометрически пересечение $W(\alpha_1) \cap W(\alpha_2)$ до компактификации. Оно состоит из 4-х компонент:

A — прямая флага соединяет точки флагов α_1 и α_2 ;

B — прямая флага проходит через точку флага α_1 , а точка флага лежит на прямой l_2 флага α_2 ;

C — точка флага совпадает с точкой пересечения прямых флагов α_1 и α_2 ;

D — прямая флага проходит через точку флага α_2 , а точка лежит на прямой флага α_1 .

Компоненты A и C диффеоморфны S^2 без точки, а B и D — S^2 без двух точек. Следующие пары компонент пересекаются по различным точкам: (A,B), (A,D), (B,C), (C,D). На рис. II изображены некомпактифицированный и компактифицированный комплексы $\mathbb{W}(\alpha_1) \cap \mathbb{W}(\alpha_2)$. Легко видеть, что комплекс $\mathbb{W}(\alpha_1) \cap \mathbb{W}(\alpha_2)$ гомотопически эквивалентен букету из 4-х S^2 и 6-ти S^1 .

Следствие. Группы когомологий комплекса $\mathbb{W}(\alpha_1) \cap \mathbb{W}(\alpha_2)$ не имеют кручений, а его числа Бетти равны 1, 6, 4.

7.5.5. Лемма. Трех флагам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ на CP^2 в общем положении нетрансверсальны 6 различных флагов. Прямые трех из них проходят через пару точек флагов α_i и α_j , а точка находится на прямой флага α_k ; для трех других прямые соединяют точку пересечения прямых флагов α_i и α_j с точкой флага α_k , где (i, j, k) — любая перестановка чисел 1, 2, 3.

Член E_1 спектральной последовательности Майера-Виеториса для приведенных когомологий комплекса $\mathbb{W}(\hat{\alpha})$ изображен в табл. 2.

В спектральной последовательности $d_2 = d_3 = \dots = 0$, а дифференциал d_1 может отличаться от нуля только для отображения элементов $E_{2,0}^1 \rightarrow E_{2,1}^1$. Дифференциал d_1 в этой спектральной последовательности двойственен гомоморфизму в гомологиях, индуцированному вложением i -кратных компонент в $(i-1)$ -кратные. Покажем, что вложение 2-мерных гомологий $\mathbb{W}(\alpha_i) \cap \mathbb{W}(\alpha_j)$ в 2-мерные

Таблица 2

Член E_1 последовательности Майера-Виеториса для $\tilde{H}^*(\overline{W}(\alpha))$.

$2(k-1)\mathbb{Z}$			
$2(k-1)\mathbb{Z}$			
$(k-1)\mathbb{Z}$	$4C_2^{k-1}\mathbb{Z}$		
	$6C_2^{k-1}\mathbb{Z}$		
		$6C_3^{k-1}\mathbb{Z}$	

гомологии $\overline{W}(\alpha_i)$ индуцирует нулевой гомоморфизм. Действительно, любая из 4-х образующих 2-мерных гомологий для компонент A, B, C или D вкладывается в одну из 2-х компонент шлейфа $\overline{W}(\alpha_i)$, диффеоморфных S^4 . Следовательно, любой 2-цикл после вложения затягивается. Тем самым, $E_1 = E_\infty$ и $E_1 = \tilde{H}^*(\overline{W}(\alpha))$, так как E_1 не имеет кручений. Число образующих $\tilde{H}^*(F(\alpha))$ равно $6C_{k-1}^3 + 10C_{k-1}^2 + 5C_{k-1}^1 = k^3 - k^2 + k - 1$, что и доказывает теорему Ш.7.1.

Укажем в заключение, что М.З.Шапиро получил обобщение предыдущего результата о вырождении спектральной последовательности Майера-Виеториса для когомологий комплексифицированных шлейфов полных флагов в \mathbb{C}^3 на произвольные комплексные грассманианы, пространства полных и неполных флагов. Им получены результаты об M -свойстве в пространствах PTP^n и построен набор из 4-х шлейфов в вещественном $G_{2,4}$, не обладающих M -свойством.

ЛИТЕРАТУРА

1. Азбелев Н.В., Цалюк З.Б. К вопросу о распределении нулей решений линейного дифференциального уравнения 3-го порядка // Мат. сб. - 1960 - Т.51, № 4, - С. 475-486.

2. Арнольд В.И. Гиперболические многочлены и отображения Вандермонда // Функц. ан. - 1986 - Т.20, № 2.-С. 52-53.

3. Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978. - 304 С.

4. Арнольд В.И. О ньютоновском потенциале гиперболических слоев// Тр.Тбилис. ун-та, сер. мат., мех., астр. - 1982 - № 3-14, вып. 232-233. - С.23-29.

5. Арнольд В.И. О ньютоновском притяжении скоплений пылевидных частиц // УМН. - 1982 - Т.37, № 4. - С.125.

6. Арнольд В.И. Особенности границ пространств дифференциальных уравнений// УМН. - 1986 - Т.41, № 4. - С. 153.

7. Арнольд В.И. Теоремы Штурма и симплектическая геометрия// Функц. ан. - 1985 - Т.19, № 4. - С. 1-10.

8. Арнольд В.И. О поверхностях, определяемых гиперболическими уравнениями // Мат. заметки, - 1988 - Т.44, № 1. - С. 3-13.

9. Арнольд В.И. Разветвленные накрытия $CP^2 \rightarrow S^4$, гиперболичность и проективная топология // Сиб.мат.журн. - 1988 - Т.ХХІХ, № 5. - С-36-47.

10. Арнольд В.И. Нормальные формы функций вблизи вырожденных критических точек, группы Вейля A_k, D_k, E_k и лагранжевы особенности //Функц.ан. - 1972 - Т.6, № 4. - С.3-25.

11. Арнольд В.И. Критические точки функций на многообразии с краем, простые группы Ли B_k, C_k, F_k и особенности эволют.// УМН. - 1978 - Т. 33, № 5. - С.91-105.

12. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. Т.1, - М.: Наука, 1982, - 304 С.
13. Атья М.Ф., Ботт Р., Гординг Л. Лакуны для гиперболических дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, I,2 //УМН. - 1971 - Т.26, № 2. - С.25-100; УМЕ. - 1984 - Т.39, № 3. - С.171-225.
14. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1966, - 351 С.
15. Браун К.С. Когомологии группы. - М.: Наука, 1987. - 383 С.
16. Вайнштейн А.Д., Шапиро Б.З. Особенности границы области гиперболичности // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Новейшие достижения. - 1988 - Т.33. С.193-219.
17. Вайнштейн А.Д., Шапиро Б.З. Особенности гиперболических многочленов и границы области гиперболичности //УМН. - 1985 - Т.40, № 5. - С.305.
18. Васильев В.А. Резкость и локальное условие Петровского для строго гиперболических уравнений с постоянными коэффициентами //Изв. АН СССР, сер. мат., - 1986 - Т.50, № 2. - С.242-283.
- 19.Вершик А.М., Гершкович В.Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи //Совр. пробл. матем. Фунд. напр. - 1987 - Т.16. - С.3-85.
20. Волевич Л.Р., Иврий В.Я. Гиперболические уравнения // И.Г.Петровский. Избранные труды. Т.1. - М.: Наука - 1987 - С. 395-417.
21. Габриэлов А.М. Принцип Гюйгенса и его обобщения. И.Г.Петровский. Избранные труды. Т.1, - М.: Наука, 1986 - С.456-464.
22. Гантмахер Ф.Р. О несимметрических ядрах Келлога //ДАН. - 1936 - Т.1, № 10. - С. 3-5.
23. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1967. -576 С.

24. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. - М.-Л.: Гостехиздат, 1960. - 360 С.

25. Глазман И.М. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. - М.: Физматгиз, 1963. - 245 С.

26. Горюнов В.В. Векторные поля и функции на дискриминантах полных пересечений и бифуркационных диаграммах полных пересечений // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Новейшие достижения. Т.33. - 1988 - С. 31-54.

27. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений. - М.: И.Л., -1961. - 122 С.

28. Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. - М.: Мир.-1986. - 360 С.

29. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. - М.: Мир. - 1976 - 464 С.

30. Казарян М.Э. Особенности границы фундаментальных систем, уплощения проективных кривых и клетки Шуберта // Итоги науки и техники. Совр. проблемы математики. Новейшие достижения. Т.33. - 1988 - С.215-234.

31. Клингенберг В. Лекции о замкнутых геодезических. - М.: Мир. - 1982 - 414 С.

32. Кондратьев В.А. Осцилляционные свойства решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ // Тр. Моск. Мат. общ. - 1961 - Т.10. - С.419-436.

33. Крейн М.Г. Осцилляционные теоремы для обыкновенных линейных дифференциальных операторов произвольного порядка // ДАН. - 1939 - Т.25, № 9. - С.717-720.

34. Крейн М.Г. О несимметричных осцилляционных функциях

Грина обыкновенных дифференциальных операторов // ДАН. - 1939 - Т.25, № 8. - С.643-646.

35. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема момента Маркова и экстремальные задачи. - М.: Наука. - 1973 - 373 С.

36. Левантовский Л.В. Особенности границы области устойчивости // Функци. ан. - 1982 - Т.16, № 1. - С.44-48.

37. Левин А.Ю. Неосцилляция решений уравнения $x^{(n)} + p_1(t)x^{(n-1)} + \dots + p_n(t)x = 0$ // УМН. - 1969 - Т.24, № 2. - С.43-96.

38. Лере Ж. Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексно аналитическом многообразии. - М.: Мир - 1961 - 140 С.

39. Лере Ж. Обобщенное преобразование Лапласа. - М.: Мир, - 1969. - 168 С.

40. Лере Ж. Гиперболические дифференциальные уравнения. - М.: Наука. - 1984. - 208 С.

41. Лере Ж., Гординг Л., Котакэ Т. Задача Коши. - М.: Мир, - 1967. - 152 С.

42. Лидский В.Б. Осцилляционные теоремы для канонической системы дифференциальных уравнений // ДАН СССР. - 1955 - Т.102, № 5. - С.877-880.

43. Ляшко О.В. Классификация критических точек функций на многообразии с особым краем // Функци. ан. - 1983 - Т.17, № 3. - С.28-36.

44. Матов В.И. Области эллиптичности общих семейств однородных многочленов и функции экстремума // Функци. ан. - 1985 - Т.19, № 2. - С.26-36.

45. Матов В.И. Функции экстремума конечных семейств выпуклых однородных функций // Функци. ан. - 1987 - Т.21, № 1. - С.51-62.

46. Мизохата С. Теория уравнения с частными производными. - М.: Мир. - 1977. - 504 С.

47. Олейник О.А., Шубин М.А. Международная конференция выпускников механико-математического факультета МГУ по теме "Дифференциальные уравнения и их приложения" // УМН. - 1982 - Т.37, № 6. - С.261-285.
48. Петровский И.Г. О диффузии волн и лакунах для гиперболических уравнений // Мат. сб. - 1945 - Т.17, № 3. - С.289-370.
49. Петровский И.Г. О задаче Коши для системы уравнений в частных производных // Мат. сб. - 1937 - Т. 2, № 5. - С.815-870.
50. Петровский И.Г. Об аналитичности решений систем дифференциальных уравнений // Мат. сб. - 1939 - Т.5, № 1. - С.3-70.
51. Петровский И.Г. О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций // Бюл. МГУ, матем. и мех. - 1938 - Т.1, № 7. - С.1-72.
52. Рохлин В.А. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых // УМН. - 1978 - Т.33, № 5. - С.77-89.
53. Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. - М.: Мир. - 1975. - 263 С.
54. Фукс Д.Б. Классические многообразия. Совр. пробл. матем. Фунд. направ. Т.12. - 1986 - С.253-314.
55. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Мир. - 1970. - 720 С.
56. Хермандер Л. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.2. - М.: Мир. - 1986. - 456 С.
57. Шапиро Б.З. Линейные дифференциальные уравнения и вещественные многообразия флагов // Функц. ан., - 1989 - Т.23, № 1. - С. 92-93.
58. Шапиро Б.З. Граница области неосцилляционности для линейных гамильтоновых систем // УМН. - 1988 - Т.43, № 4. - С.170-171.

59. Янг Л. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. - М.: Мир. - 1974. - 451 с.
60. Ball J.M. Differentiability properties of symmetric and isotropic functions //Duke Math. J., -1984-,V.51,N3,P.699-728.
61. Bott R. On the iteration of closed geodesics and the Sturm intersection theory //Comm. Pure and Appl. Math., -1956-, V.9,N2,P.171-206.
62. Bruce J.W., du Plessis A.A., Wall C.T.C. Determinacy and unipotency //Inv. Math., -1987-,V.88,N3,P.521-554.
63. Buchweitz R. Contributions a la theorie des singularities//These.Universite de Paris. -1981-.
64. Chow W.L. Uber Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung //Math. Ann., -1939-,V.117,N1,S.98-105.
65. Coppel W.A. Disconjugacy. Lect. Notes in Math., -1971-, V.220.
66. Cushman R., Duistermaat J.J. The behavior of the index of a periodic linear Hamiltonian system under iteration //Adv. in Math., -1977-,V23,N1,P.1-21.
67. Damon J. Deformations of sections of singularities and Gorenstein surface singularities. Preprint. Columb. univ. -1982-.
68. Damon J. The unfolding and determinacy theorems for subgroups of \mathcal{O} and K . Mem. of AMS., -1984-,V.50,N306.
69. Duistermaat J.J. On the Morse index in variational calculus //Adv. in Math., -1976-,V.21,N2,P.173-195.
70. Edwards H.M. A generalized Sturm theorem //Ann.of Math., -1964-,V.80,N1,P.22-57.

71. Eisenbud D., Harris J. Divisors on general curves and cuspidal rational curves //Inv. Math., -1983-, V.74, N3, P.371-418.
72. Garding L. Local hyperbolicity //Isr. J. Math., -1972-, V.13, N1, P.65-81.
73. Garding L. An inequality for hyperbolic polynomials //J. Math. Mech., -1959-, V.8, N6, P.957-965.
74. Hamenstadt U. Zur Theorie von Carno-Caratheodory Metriken und ihren Anwendungen //Bonner Math. Schr., -1987-, N180, S.1-64.
75. Hartman P. Unrestricted n-parameter families //Rend. Circ. Matem. Palermo. -1958-, V.7, N2, P.123-142.
76. Kellogg O.D. Orthogonal functions sets arising from integral equations //J. of Math., -1918-, V.40, N2, P.145-154.
77. Kraner A.J. A generalization of Chow theorem and the bang-bang theorem to nonlinear control problem //SIAM J. Control., -1974-, V.12, N1, P.43-52.
78. Krein M.G. Sur les operateurs differentielles autoadjoints et leur fonctions de Green symmetrique //Mat. сб. -1937-, T.2, N6, C.1023-1072.
79. Kreith K. Oscillation theory. Lect. Notes in Math., -1973-, V.234.
80. Little J. Nondegenerate homotopies of curves on the unit 2-sphere //J. Diff. Geom., -1970-, V.4, N3, P.339-348.
81. Morse M. A generalization of the Sturm separation and comparison theorems //Math. Ann., -1930-, V.103, N3, P.52-69.
82. Morse M. The Calculus of Variations in the Large. AMS. Coll. Publ., NY, -1934-, V.18.
83. Nuij W. A note on hyperbolic polynomials //Math. Scand., -1968-, V.23, N1, P.69-72.

84. Polya G. On the mean-value theorem corresponding to a given linear homogeneous equation //Trans. Amer. Math. Soc., -1924-,V.24, N4,P.312-324.

85. Reid W.T. Sturmian theory for ordinary differential equations. Appl.Math.Sci., -1980-,V.31.

86. Sherman T.L. Conjugate points and simple zeroes for ordinary linear differential equations //Trans. Amer. Math. Soc., -1969-V.146,N2,P.397-411.

87. Sturm J.C.F. Memoire sur les equations differentielles lineares du second ordre //J. Math. Pur. Appl., -1836-,V.1P.106-186.

88. Swanson C.A. Comparison and oscillation theory for linear differential equations . Acad. Press, NY. -1968-.