О НЬЮТОНОВСКОМ ПРИТЯЖЕНИИ ЭЛЛИПСОИДОВ

Б. ШАПИРО

От редакции.
В этой математической статье используются понятия, хорошо знакомые вам из курса физики: сила, потенциал, эквипотенциальная поверхность... Конечно, всем им можно дать точное математическое определение. Но и без этого их наглядный смысл вполне ясен. На всякий случай напомним несколько фактов: сила (и потенциал), которую создают несколько масс (или зарядов), равна сумме сил (и потенциалов), созданных каждой из них; если в некоторой области пространства потенциал равен константе, то силовое поле равно нулю; эквипотенциальная поверхность — это поверхность, потенциал всех точек которой равен некоторой константе; вектор силы в каждой точке такой поверхности перпендикулярен ей. Наконец, автор свободно пользуется (в духе Ньютона!) понятиями бесконечно малых углов, площадей, объемов и т. п.

Ньютон о притяжении однородной сферы

Свои основные математические достижения Исаак Ньютон опубликовал в 1687 году в «Математических началах натуральной философии». На протяжении этого трактата он многократно возвращается к теории притяжения неподвижных и вращающихся тел и вопросу о форме земной поверхности. Среди прочего Ньютон приводит элегантное доказательство следующего факта.

Теорема XXX из отдела XIII «О притягательных силах сферических тел»:

«Если к отдельным точкам сферической поверхности направлены равные центростремительные силы, убывающие в отношении квадратов расстояний, то частица, помещенная внутри этой поверхности, от таких сил ни в какую сторону притяжения не испытывает».

Другими словами, однородная материальная сфера не притягивает внутренние точки.

Ньютон рассуждает так. Пусть P — произвольная точка внутри сферы (рис. 1). Возьмем маленький телесный угол с центром P и покажем, что силы, с которыми действуют на P две бесконечно малые части поверхности, высекаемые на ней углом, взаимно уничтожаются. Действительно, сила, с которой действует на P каждая из частей, пропорциональна массе части, т. е. ее площади, и обратно пропорциональна квадрату расстояния до точки P. Основания бесконечно узких конусов с вершиной P можно считать плоскими. Как видно из рисунка 1, на котором изображено сечение сферы плоскостью, проходящей через ее центр O и ось конусов, эта ось составляет с основаниями равные углы. Следовательно, конусы подобны, и отношение площадей их оснований равно отношению квадратов длин их осей. Поэтому силы притяжения двух рассматриваемых частей взаимно уничтожаются. Ньютон заключает:

«Из этого рассуждения следует, что притяжение всей сферической поверхности, как состоящее из противоположных элементов, уничтожается; следовательно, P ни в какую сторону этим притяжением к движению не побуждается».

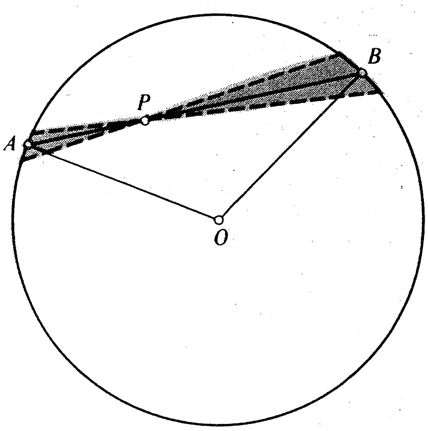
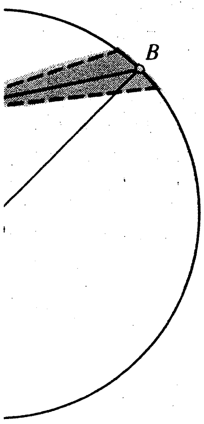


Рис. 1.

СОИДОВ

енький телесный
кажем, что силы,
от на P две бес-
ги поверхности,
углом, взаимно
твительно, сила,
на P каждая из
ьна массе части,
обратно пропор-
расстояния до
есконечно узких
можно считать
из рисунка 1,
о сечение сферы
щей через ее
, эта ось состав-
равные углы.
подобны, и от-
оснований рав-
ов длин их осей.
ения двух рас-
взаимно унич-
лючает:
дения следует,
ей сферической
стоящее из про-
ентов, уничто-
но, P ни в ка-
притяжением
ждается».



Сделаем два замечания по поводу этого поучительного рассуждения. Во-первых, оно годится и для однородного шарового слоя, который можно представлять себе состоящим из бесконечного числа материальных сфер. Во-вторых, массу можно заменить на электрический заряд, поскольку кулоновская сила тоже обратно пропорциональна квадрату расстояния. Значит, однородная заряженная сфера не создает внутри себя электрического поля.

Поле притяжения однородной сферы во внешней области

Выяснив, каким будет гравитационное поле внутри однородной сферы, Ньютон заинтересовался вопросом, какую силу притяжения создает сфера во внешней области пространства. В силу симметрии задачи эта сила будет зависеть лишь от расстояния до центра сферы (и, конечно, от ее массы). Но как именно?

Забудем на время, что мы изучаем силы притяжения, и поговорим о течении жидкости. Представим себе, что в начале координат расположен источник, из которого по радиусам сферически симметрично растекается несжимаемая жидкость. В силу несжимаемости через каждую сферу с центром в источнике за единицу времени протекает одинаковое количество жидкости. Это количество пропорционально площади сферы, т. е. квадрату ее радиуса, и пропорционально скорости жидкости. Значит, скорость течения обратно пропорциональна квадрату расстояния до источника.

Мы сделали важное наблюдение: поле скоростей сферически-однородной несжимаемой жидкости — такое же, как силовое поле точечной массы (или электрического заряда). Это означает, что силовое поле точечной массы обладает свойством несжимаемости: величина его потока через границу любой области, не содержащей массу, равна нулю — сколько втекает, столько и вытекает. То же верно и для любого распределения масс (и зарядов), ибо сила, которую создают несколько масс, равна сумме сил, созданных каждой из них. Теперь мы в состоянии доказать следующую теорему:

сила притяжения однородной сферы массой M совпадает с силой, создаваемой точечной массой M, помещенной в центр сферы.

Действительно, как мы уже установили, силовое поле сферы сферически-симметрично и несжимаемо. Но мы знаем, что единственное радиальное поле скоростей несжимаемой жидкости обратно пропорционально квадрату расстояния до центра, т. е. совпадает с полем точечной массы. Что эта масса совпадает с массой сферы, следует из сравнения потоков через поверхности, охватывающие данную сферу.

На этом исследование притяжения однородной сферы завершено. Если бы мы попытались вычислять силы прямо, т. е. интегрируя вклады бесконечно малых кусочков поверхности, то наверняка встретились бы с большими трудностями. Теперь наша задача — обобщить полученные результаты на более сложные поверхности.

О свободном распределении зарядов

Свободное распределение зарядов на замкнутой проводящей поверхности — это такое распределение, которое получается, если предоставить заряду возможность распределяться самостоятельно в отсутствие внешних сил. Например, на сфере такое распределение будет однородным. Свободное распределение обладает двумя важными свойствами.

Всякая поверхность является эквипотенциальной для свободного распределения зарядов на ней.

Это очевидно: разность потенциалов на поверхности привела бы к перераспределению зарядов на ней.

Силовое поле свободного распределения зарядов внутри замкнутой поверхности равно нулю (а потенциал равен константе).

Действительно, пусть потенциал, равный некоторой константе на поверхности, отличен от этой константы во внутренней области. Тогда в некоторой точке P он достигает минимального или максимального значения. Рассмотрим маленькую эквипотенциальную поверхность, окружающую эту точку. Силовые линии протыкают ее и сходятся в точке P, что противоречит несжимаемости потока. Итак, потенциал равен константе, а силовое поле — нулю.

Как видите, теорема Ньютона о том, что свободное распределение зарядов на сфере не создает внутри нее силовое поле, обобщается на произвольные поверхности. Теперь мы займемся явным видом свободного распределения для поверхностей, следующих по сложности за сферой — для эллипсоидов.

О гомеоидах

Эллипсоидом называется поверхность, полученная из сферы растяжением или сжатием вдоль трех перпендикулярных осей с тремя, вообще говоря, различными коэффициентами. То, что получается при описанном растяжении из шарового слоя, называется *гомеоидом* (рис. 2). Ограничивающие гомеоид поверхности эллипсоидов гомотетичны, причем центр гомотетии совпадает с их общим центром.

Попробуем вычислить притяжение бесконечно тонкого гомеоида в какой-нибудь внутренней точке P. Вы, наверное, догадались, что это притяжение окажется равным нулю; и чтобы доказать это, нужно убедиться, что силы притяжения двух бесконечно малых пирамид, заштрихованных на рисунке 2, взаимно уничтожаются. Эти силы пропорциональны массам (т. е. объемам) пирамид и обратно пропорциональны квадратам расстояний до точки P. Объем заштрихованной бесконечно малой пирамиды можно вычислить как произведение площади S перпендикулярного сечения бесконечно малого телесного угла на длину h отрезка оси этого угла, заключенного в гомеоиде. Площадь S пропорциональна квадрату расстояния r, поэтому сила притяжения правой пирамиды на рисунке 2 пропорциональна $r^2h/r^2=h$. Аналогично, сила притяжения левой пирамиды пропорциональна H. Остается заметить, что $h=H$ — ведь соответствующие отрезки лежат на одной прямой и длины их прообразов в шаровом слое одинаковы (рис. 3). Итак, мы доказали следующую теорему Ньютона:

сила притяжения однородного бесконечно тонкого гомеоида в любой его внутренней точке равна нулю.

(Отсюда, как и в случае сферы, следует, что равно нулю и притяжение настоящего «толстого» гомеоида.)

Как мы уже знаем, свободное распределение зарядов — это такое распределение, которое создает в любой внутренней точке нулевое поле. С другой стороны, поскольку ограничивающие гомеоид поверхности гомотетичны, его толщина в любой точке пропорциональна длине радиуса-вектора, проведенного из центра в эту точку. Соединяя эти два замечания, мы приходим к описанию свободного распределения зарядов на эллипсоиде:

плотность свободного распределения зарядов в каждой точке пропорциональна длине радиуса-вектора, проведенного в эту точку из центра эллипсоида.

Теорема Арнольда

Для того чтобы обобщить теорему о гомеоиде, нам придется немного повозиться с формулами. Вспомним, что эллипсоид получается растяжением сферы вдоль трех осей коор-

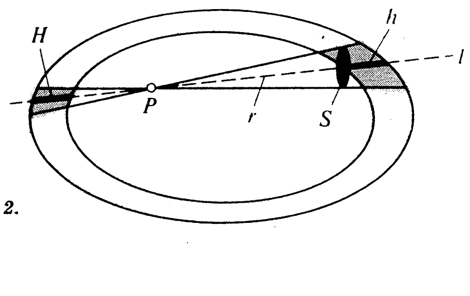


Рис. 2.

динат. Пусть a, b и c — коэффициенты растяжения, т. е. при растяжении координата x превращается в ax, y — в by, а z — в cz. При этом уравнение единичной сферы

$$x^2+y^2+z^2=1$$

превратится в уравнение эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

(подумайте: почему a, b и c попали в знаменатель?). При гомотетии координаты x, y и z умножаются на одно и то же число; поэтому уравнением близкой гомотетичной поверхности будет

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1+\varepsilon$$

(а коэффициент гомотетии равен $\sqrt{1+\varepsilon}$). Итак, плотность свободного распределения зарядов на поверхности эллипсоида M, заданного уравнением

$$f(x, y, z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

пропорциональна расстоянию до бесконечно близкой поверхности M_ε, заданной уравнением

$$f(x, y, z)=1+\varepsilon.$$

Теперь мы совершим прыжок в 300 лет и из времени Ньютона перенесемся в наши дни. Рассмотрим поверхность N, заданную уравнением

$$f(x, y, z)=0,$$

где f — некоторый многочлен n-й степени от трех переменных. Распределим на N заряд с плотностью, пропорциональной расстоянию от N до бесконечно близкой поверхности N_ε, заданной уравнением

$$f(x, y, z)=\varepsilon.$$

Мы собираемся доказать, что такая заряженная поверхность не притягивает свои внутренние точки. Только какие точки называть внутренними?

Посмотрим на рисунок 3, на котором изображена поверхность, заданная некоторым многочленом 6-й степени. Точку R, конечно, нельзя считать внутренней; а как быть с точками Q_1, Q_2 или P? Дадим определение:

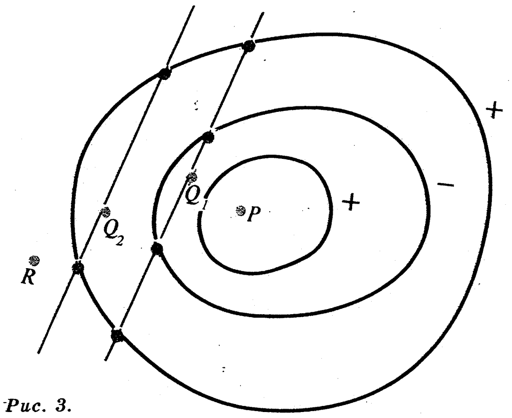


Рис. 3.

точка называется *внутренней* для поверхности N, если каждая проходящая через нее прямая пересекает N ровно в n точках (n — степень многочлена, задающего N)*). При таком определении ни точка R, ни точки Q_1 и Q_2 внутренними не являются, а точка P — внутренняя.

Теперь мы можем сформулировать теорему известного советского математика В. И. Арнольда:

заряженная поверхность N, заданная уравнением n-й степени $f(x, y, z)=0$, с плотностью заряда, пропорциональной расстоянию до бесконечно близкой поверхности N_ε, заданной уравнением $f(x, y, z)=\varepsilon$, не притягивает своих внутренних точек P. Знак заряда чередуется: положителен на ближайшем к P куске поверхности, отрицателен — на следующем и т. д. (рис. 3).

Теорема Арнольда доказывается аналогично теореме о гомеоиде. Возьмем бесконечно малый телесный угол с вершиной в P и осью l (см. снова рис. 2) и докажем, что силы притяжения высекаемых им на N бесконечно малых площадок взаимно уничтожаются. Заменим заряженную поверхность на бесконечно тонкий материальный слой между поверхностями N и N_ε (аналог гомеоида). Сила притяжения, создаваемая одной из пирамидок в точке P, пропорциональ-

*) Подумайте, почему точек пересечения заведомо не больше n. Бывают и такие многочлены, что соответствующие поверхности вообще не содержат внутренних (в смысле данного определения) точек.

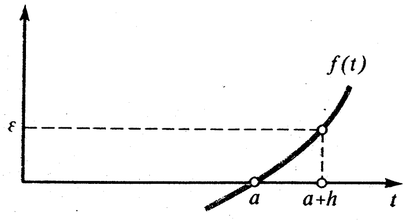


Рис. 4.

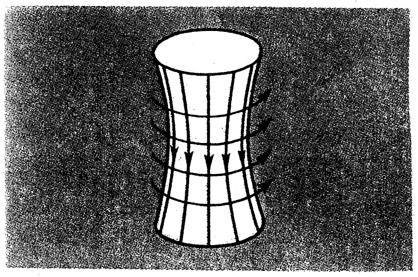


Рис. 5.

на $Sh/r^2 \sim h$. Поэтому достаточно доказать, что сумма длин отрезков (с учетом знаков !), высекаемых поверхностями N и N_ε на прямой l, равна нулю.

Но это утверждение относится уже не к трехмерному пространству, а к прямой l. Ограничив f на эту прямую, мы получим функцию одной переменной, которую будем по-прежнему обозначать через $f(t)$. Пусть a — одна из точек пересечения l и N. Тогда $f(a)=0$. Сейчас мы выразим длину h через ε. Посмотрите на рисунок 4:

$$f(a)=0 \text{ и } f(a+h)=\varepsilon.$$

По определению производной,

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{\varepsilon-0}{h}=\frac{\varepsilon}{h}.$$

Поэтому $h=\varepsilon/f'(a)$ (точное равенство мы написали, т. к. и ε, и h бесконечно малы). Итак, нам нужно доказать, что

$$\frac{1}{f'(a_1)}+\frac{1}{f'(a_2)}+\ldots+\frac{1}{f'(a_n)}=0, \quad (1)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — точки пересечения l и N, т. е. корни многочлена $f(t)$.

Вспомним, что $f(t)$ — многочлен n-й степени, имеющий ровно n корней. Такой многочлен (с точностью до постоянного множителя) можно записать в виде

$$f(t)=(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_n),$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — его корни. Дифференцируя это равенство, получим:

$$f'(t)=(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)+$$
$$+(t-a_1)(t-a_3)\ldots(t-a_n)+\ldots+$$
$$+(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_{n-1}).$$

В частности,

$$f'(a_i)=(a_i-a_1)(a_i-a_2)\ldots$$
$$\ldots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\ldots(a_i-a_n).$$

Все слагаемые, кроме i-го, содержат множитель (a_i-a_i) и обращаются в ноль.

Мы видим, что равенство (1) эквивалентно тождеству:

$$\frac{1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}+$$
$$+\frac{1}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}=0. \quad (2)$$

Трудно поверить, но это тождество выполнено для любых попарно различных чисел $a_1, \ldots, a_n$. И доказывается оно поистине олимпиадным приемом!

Рассмотрим многочлен $(n-1)$-й степени:

$$g(t)=\frac{(t-a_2)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n)}+$$
$$+\frac{(t-a_1)(t-a_3)\ldots(t-a_n)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(t-a_1)(t-a_2)\ldots(t-a_{n-1})}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\ldots(a_n-a_{n-1})}.$$

При $t=a_i$ все слагаемые, кроме i-го, обращаются в ноль, а i-е — в 1. Поэтому

$$g(a_1)=g(a_2)=\ldots=g(a_n)=1.$$

Значит, многочлен $(n-1)$-й степени $g(t)-1$ имеет n корней, что возможно только если $g(t)-1=0$ для всех t. В частности, равен нулю старший член многочлена $g(t)$. Но это и есть правая часть тождества (2)! Тем самым это тождество, а вместе с ним и теорема Арнольда, доказаны.

Мы доказали теорему даже с «некоторым запасом». Действительно, нулю равен не только старший член многочлена $g(t)-1$, но и остальные его члены. Это наблюдение позволяет усилить доказанную теорему:

утверждение о равенстве нулю силы притяжения сохранится, если плотность заряда умножить на значение произвольного многочлена $\varphi(x, y, z)$ степени не выше $(n-2)$.

Существуют и другие современные обобщения теоремы Ньютона. Например, рассмотрим проводящий гиперболоид (см. статью Д. Фукса в «Кванте» № 12 за 1989 год). И приложим к нему на бесконечности некоторую разность потенциалов. Вдоль меридианов гиперболоида начнет течь электрический ток. Оказывается, что магнитное поле этого тока внутри гиперболоида равно нулю, а во внешней области направлено вдоль параллелей (рис. 5), причем величина этого поля явно вычисляется. Наоборот, существует единственный и явно вычисляемый поверхностный ток вдоль параллелей гиперболоида, магнитное поле которого во внешней области равно нулю, а внутри направлено вдоль меридианов.

К сожалению, мы не можем останавливаться на этом интересном сюжете, так как нас ожидает еще одно путешествие во времени: на этот раз — в 1809 год.

Поле однородного гомеоида во внешней области

Вернемся к однородному гомеоиду. Мы уже знаем, что он создает нулевое поле в своей внутренней области. А каким будет поле во внешней области пространства? Ответ на этот вопрос нашел в 1809 году шотландский механик и математик Джеймс Айвори. Ему удалось описать эквипотенциальные поверхности свободного распределения зарядов на эллипсоиде — оказалось, что это тоже эллипсоиды (в случае сферы эквипотенциалями, конечно, служат концентрические сферы).

Рассмотрим эллипсоид M, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (3)$$

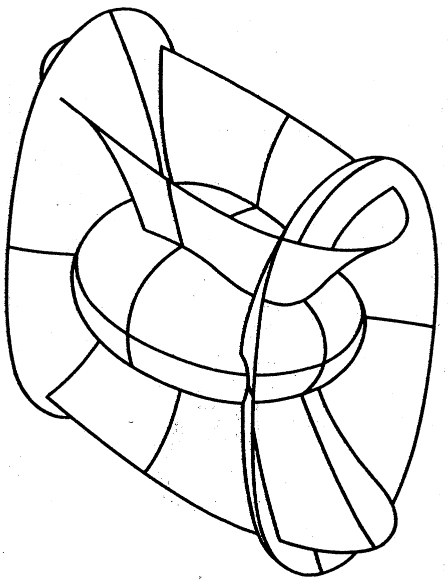


Рис. 6.

Софокусным эллипсоидом называется всякий эллипсоид M, заданный уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}+\frac{z^2}{c^2+t}=1, \qquad (4)$$

где t — некоторое число ($t>-a^2$, $t>-b^2$, $t>-c^2$). Каждому t отвечает свой эллипсоид, причем при $t\neq s$ эллипсоиды M_t и M_s не пересекаются, а все семейство $\{M_t\}$ заполняет область пространства.

Название «софокусные эллипсоиды» подсказано аналогией с плоскостью. Эллипс M_d на плоскости можно задать как множество точек, сумма расстояний от которых до двух данных точек — фокусов — равна некоторой постоянной d.

Иными словами, если закрепить в фокусах концы нити длины d, вставить в нить карандаш и натянуть ее, то карандаш вычертит эллипс M_d. При разных t мы получим разные эллипсы с фиксированными фокусами. Нетрудно убедиться (сделайте это!), что в подходящих координатах семейство софокусных эллипсов задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+t}+\frac{y^2}{b^2+t}=1. \qquad (5)$$

Если же выбрать t так, что одно из

слагаемых в формуле (5) станет отрицательным, то уравнение (5) задаст уже не эллипс, а гиперболу, причем эта гипербола будет перпендикулярна всем эллипсам M_d. Аналогично, если в формуле (4) отрицательны одно или два слагаемых, то она задает семейство однополостных или двуполостных гиперболоидов, причем поверхности всех трех семейств будут попарно перпендикулярны (рис. 6).

Эллипсоид, как и эллипс, тоже можно задать с помощью нити фиксированной длины — рисунок 7.

Рассмотрим точки $P(x, y, z)$ и $P'(x', y', z')$, лежащие на эллипсоидах M и M_t. Один эллипсоид получается из другого растяжением в направлениях трех координатных осей. Точки P и P' называются *соответственными*, если при таком растяжении P переходит в P'. Иными словами,

$$\frac{x}{a}=\frac{x'}{a'},\quad \frac{y}{b}=\frac{y'}{b'},\quad \frac{z}{c}=\frac{z'}{c'},$$

где

$$(a')^2=a^2+t,\ (b')^2=b^2+t,\ (c')^2=c^2+t. \tag{6}$$

Лемма Айвори. *Пусть P, P' и Q, Q' — две пары соответственных точек, лежащих на софокусных эллипсоидах: $P, Q\in M$, $P', Q'\in M_t$. Тогда $PQ'=P'Q$.*

Мне не удалось придумать геометрического доказательства этого утверждения, поэтому нам придется немного посчитать. Пусть координаты точек P и Q равны (x, y, z) и (u, v, w), а точек P' и Q' — $\left(\frac{a'}{a}x, \frac{b'}{b}y, \frac{c'}{c}z\right)$ и $\left(\frac{a'}{a}u, \frac{b'}{b}v, \frac{c'}{c}w\right)$. Тогда

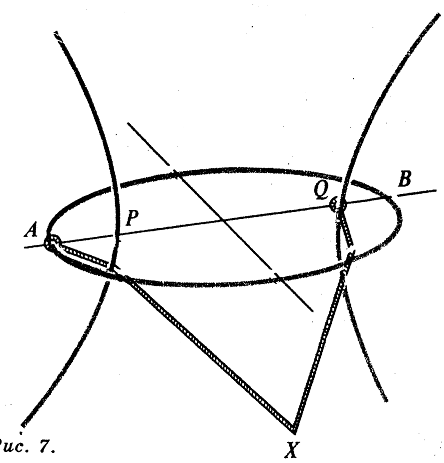


Рис. 7.

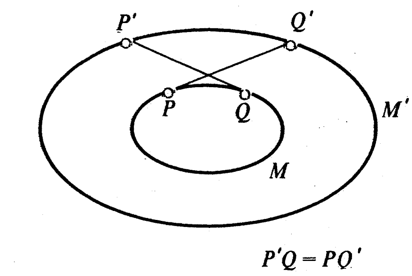


Рис. 8.

$$|P'Q|^2=\left(\frac{a'}{a}x-u\right)^2+\left(\frac{b'}{b}y-v\right)^2+\left(\frac{c'}{c}z-w\right)^2=\left(\frac{a'}{a}\right)^2x^2+\left(\frac{b'}{b}\right)^2y^2+\left(\frac{c'}{c}\right)^2z^2+u^2+v^2+w^2\underline{-2\frac{a'}{a}xu-2\frac{b'}{b}yv-2\frac{c'}{c}zw}.$$

$$|PQ'|^2=\left(x-\frac{a'}{a}u\right)^2+\left(y-\frac{b'}{b}v\right)^2+\left(z-\frac{c'}{c}w\right)^2=x^2+y^2+z^2+\left(\frac{a'}{a}\right)^2u^2+\left(\frac{b'}{b}\right)^2v^2+\left(\frac{c'}{c}\right)^2w^2\underline{-2\frac{a'}{a}xu-2\frac{b'}{b}yv-2\frac{c'}{c}zw}.$$

Подчеркнутые слагаемые в обеих формулах одинаковы. Поэтому равенство $|P'Q|^2=|PQ'|^2$ равносильно равенству:

$$\left[\left(\frac{a'}{a}\right)^2-1\right]x^2+\left[\left(\frac{b'}{b}\right)^2-1\right]y^2+\left[\left(\frac{c'}{c}\right)^2-1\right]z^2=\left[\left(\frac{a'}{a}\right)^2-1\right]u^2+\left[\left(\frac{b'}{b}\right)^2-1\right]v^2+\left[\left(\frac{c'}{c}\right)^2-1\right]w^2.$$

Согласно формулам (6), это равенство равносильно уравнению

$$t\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=t\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right),$$

которое выполняется, так как координаты точек P и Q удовлетворяют уравнению (3). Лемма Айвори доказана.

Вознаграждением за проделанную работу будет изящное доказательство теоремы Айвори об эквипотенциалях однородного гомеоида. Рассмотрим два бесконечно тонких однородных софокусных гомеоида M и M' равных объемов. Пусть P и P' — пара соответственных точек на них (рис. 8). Тогда

потенциал, создаваемый гомеоидом M' в точке P, равен потенциалу, создаваемому гомеоидом M в точке P'.

Действительно, рассмотрим бесконечно малый объем в точке Q' и равный ему объем в соответственной точке Q. По лемме Айвори, $PQ'=P'Q$. Значит, вклад элементарного объема, окружающего точку Q', в потенциал точки P равен вкладу элементарного объема, окружающего точку Q, в потенциал точки P'. Это верно для всех точек Q', что и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим, наконец, бесконечно тонкий однородный гомеоид M. Потенциал, создаваемый им в произвольной точке P' любого софокусного эллипсоида M', равен потенциалу гомеоида M' в соответственной точке $P \in M$. Но по теореме Ньютона потенциал гомеоида M' во всех внутренних точках равен константе, так как не зависит от положения точки P. Поэтому потенциал гомеоида M в любой точке P' софокусного эллипсоида M' будет одним и тем же. Мы доказали теорему Айвори:

эквипотенциальными поверхностями свободного распределения зарядов на эллипсоиде служат софокусные ему эллипсоиды.

Заключение

Теория, о которой рассказано в статье, обобщается и на пространства произвольной размерности n. При этом гравитационные (и кулоновские) силы подчиняются обобщенному закону Ньютона:

$$f \sim r^{1-n},$$

где r — расстояние между притягивающимися частицами. Если вас заинтересовал мой рассказ, попробуйте сформулировать и доказать теоремы этой статьи в плоском мире, т. е. при $n=2$. Подумайте, в частности, каким будет свободное распределение зарядов на отрезке и каковы эквипотенциальные кривые такого распределения.

А еще советую вам прочитать замечательную книгу В. И. Арнольда «Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук» (М., «Наука», 1989).

Латинские прямоугольники

(*Начало см. на с. 6*)

приближенную формулу для числа «m-этажных» латинских прямоугольников длиной n:

$$L(m,\ n) \approx (n!)^m e^{-\frac{(m-1)m}{2}}.$$

Последняя формула дает тем меньшую относительную погрешность, чем больше n (такие формулы называются асимптотическими). Правда, Эрдеш и Капланский доказали это утверждение при одной существенной оговорке: «этажность» латинского прямоугольника не должна превышать полуторную степень логарифма его длины: $m<(\ln n)^{1,5}$. Однако впоследствии стало ясно, что оно верно и для бо́льших значений m. Японский математик К. Ямамото доказал, что для его справедливости достаточно предположить «лишь», что $m<\sqrt[3]{n}$. Слово «лишь» мы взяли в кавычки потому, что математикам очень бы хотелось найти если не точные, то хотя бы асимптотические формулы без всяких ограничений на соотношение длины и «этажности» латинских прямоугольников, и подобраться к латинским квадратам, уже сейчас находящим приложение в такой практической области математики, как теория планирования эксперимента (о которой, вероятно, «Квант» еще расскажет). Но решение этой задачи — дело будущего.