Л.И.Вайнерман, А.А.Калюжный

КВАНТОВАННЫЕ ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫЕ СИСТЕМЫ

Назовем квантованной гиперкомплексной системой (г.с.) двойную гильбертову алгебру (д.г.а.) $\mathcal{D}$ в гильбертовом пространстве H со следующими дополнительными связями между операциями $\cup$ и $\cap$ в этой алгебре: (АI) $(a^{\cup})^{\cap}=(a^{\cap})^{\cup}, (a\cup b)^{\cap}=a^{\cap}\cup b^{\cap}$, $(a\cap b)^{\cup}=a^{\cup}\cap b^{\cup}$; (А2) $\mathcal{K}er\,\rho_{\cup}=\mathcal{K}er\,\rho_{\cap}=\{0\}$, $Im\,\rho_{\cup}$ $Im\,\rho_{\cap}$ – подалгебры соответственно в $\mathcal{L}_{\cup}$ и в $\mathcal{L}_{\cap}$ (здесь $\mathcal{L}_{\cup}$ и $\mathcal{L}_{\cap}$ – левые W^* -алгебры д.г.а. $\mathcal{D}$, $\mathcal{L}_{\cup *}$ и $\mathcal{L}_{\cap *}$ -соответствующие преддвойственные пространства, $\rho_{\cup}$ и $\rho_{\cap}$ естественные отображения из $\mathcal{L}_{\cap *}$ в $\mathcal{L}_{\cup}$ и из $\mathcal{L}_{\cup *}$ в $\mathcal{L}_{\cap}$ соответственно). Обозначим через $E_{\cap}$ замыкание в равномерной норме множества $L_{\cap}(\mathcal{D}\cup\mathcal{D})$ операторов вида $\mathcal{D}\ni b\mapsto L_{\cap}(a)=a\cap b$, где $a\in\mathcal{D}\cup$ – линейной оболочке всевозможных $\cup$ -произведений элементов из $\mathcal{D}$ аналогично определяются $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}$ и $E_{\cup}=\overline{L_{\cup}(\mathcal{D}\cap\mathcal{D})}$.

<u>Теорема</u>. Пусть $\mathcal{D}$ – квантованная г.с. с коммутативной операцией $\cap$. Тогда найдутся локально компактное пространство Q инволютивный гомеоморфизм $Q\ni p\mapsto p^*\in Q$ и регулярная положительная борелевская мера m такие, что: I) C^* -алгебра $E_{\cap}$ изоморфна C^* -алгебре непрерывных функций на Q, аннулирующихся на ∞; 2) этот изоморфизм продолжается до изометрии H на $L_2(Q,m)$ $\mathcal{L}_{\cap *}$ на $L_1(Q,m)$; 3) $m(A)=m(A^*)$ для любого борелевского $A\subset Q$.

Итак, если одна из операций коммутативна, то квантованная г.с. реализуется как объект, близкий к г.с. с континуальным базисом в смысле Ю.М.Березанского и С.Г. Крейна. При некоторых дополнительных ограничениях можно показать, что $L_1(Q,m)$ в точности является такой г.с.

Построены элементы гармонического анализа и теории двойственности для квантованных г.с.

А.Д.Вайнштейн, Б.З.Шапиро

ИНДЕКС МАСЛОВА ЧЕТВЕРКИ ЛАГРАНЖЕВЫХ ПЛОСКОСТЕЙ И ИНДЕКС ДВУХЗВЕННОЙ ЗАМКНУТОЙ ТРАЕКТОРИИ БИЛЛИАРДА БИРКГОФА В $\mathbb{R}^{n+1}$

Рассмотрим простейшую замкнутую траекторию гладкого биллиарда Биркгофа в $\mathbb{R}^{n+1}$ – отрезок t, соединяющий точки x_1 и x_2 и проходимый в прямом и обратном направлениях. Пусть Γ_i^n – ростки гладких гиперповерхностей ("стенок биллиарда") в точках x_i, D^2 – квадрат расстояния между точками на Γ_1^n и Γ_2^n, D_0^2 – квадратичная часть D^2.

<u>Определение</u>. Индексом Морса $\tau(t)$ траектории t называется сигнатура квадратичной формы D_0^2.

Сопоставим с каждым из ростков Γ_i^n два ростка в симплектическом многообразии всех ориентированных прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$: росток L_i^n многообразия нормалей к Γ_i^n и росток M_i^n многообразия прямых, проходящих через точку x_i. Очевидно, M_i^n, L_i^n – лагранжевы многообразия, проходящие через одну точку. Пусть m_i^n, ℓ_i^n – касательные пространства к M_i^n, L_i^n в этой точке.

<u>Определение</u>. Индексом Маслова $\tau(b_1,b_2,b_3)$ тройки лагранжевых плоскостей в симплектическом пространстве (V,ω) называется сигнатура квадратичной формы Q на пространстве $b_1\oplus b_2\oplus b_3$, определяемой формулой

$$Q(x_1\oplus x_2\oplus x_3)=\omega(x_1,x_2)+\omega(x_2,x_3)+\omega(x_3,x_1).$$

<u>Определение</u>. Индексом Маслова четверки лагранжевых плоскостей b_1,b_2,b_3,b_4 называется величина

$$\tau(b_1,b_2,b_3,b_4)=\tau(b_1,b_2,b_3)+\tau(b_1,b_3,b_4).$$

<u>Теорема</u>. $\tau(t)=\tau(\ell_1^n, m_1^n, m_2^n, \ell_2^n)$.

Н.Л.Василевский

ОБ ОДНОЙ АЛГЕБРЕ СВЕРТОК НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Группа Гейзенберга $\mathbb{H}_n$ совпадает с $\mathbb{R}^{2n+1}=\mathbb{R}^N$, наделенным следующей операцией

$$g_1 g_2=(t_1+t_2+2(y_1\cdot x_2-x_1\cdot y_2),\ x_1+x_2,\ y_1+y_2),$$

где $g_\kappa = (t_\kappa, x_\kappa, y_\kappa) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, $\kappa=1,2$, "." – скалярное произведение. В пространстве $L_2(\mathbb{H}_n)$ введем операторы правого и левого групповых сдвигов

$$(W_g^r\varphi)(h)=\varphi(hg),\ (W_g^l\varphi)(h)=\varphi(g^{-1}h),$$

и соответствующие операторы сверток

$$B=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{H}_n} b(g)W_g^r\,dg,\quad C=(2\pi)^{-\frac{N}{2}}\int_{\mathbb{H}_n} c(g)W_g^l\,dg. \qquad (I)$$

Предполагается, что преобразования Фурье $\hat b$ и $\hat c$ ядер операторов правой и левой сверток неизотропно однородны степени нуль и непрерывны в $\mathbb{R}^N\setminus\{0\}$.

Через $CS(\mathbb{R}^{2n})$ обозначим алгебру функций, непрерывных в $\mathbb{R}^{2n}$ компактифицированном бесконечно удаленной сферой. И пусть Ψ – алгебра, порожденная всеми действующими в $L_2(\mathbb{R}^n)$ глобальными псевдодифференциальными операторами с вейлевскими символами $\omega(x,\xi)\in CS(\mathbb{R}^{2n})$.

Теорема. Алгебра $\mathfrak{A}$, порожденная операторами вида (I) изометрически вкладывается в алгебру

$$\mathfrak{S}=(\Psi\otimes\Psi)^2.$$

Вложение $\mu:\mathfrak{A}\to\mathfrak{S}$ порождено следующим отображением образующих алгебры $\mathfrak{A}$:

$$\mu: B\longmapsto (B_+\otimes I;\ B_-\otimes I),$$

$$\mu: C\longmapsto (I\otimes C_+,\ I\otimes C_-),$$

где вейлевские символы операторов $B_\pm$ и $C_\pm$ определены формулами

$$\omega_{B_\pm}(x,\xi)=\hat b(\mp1,-2x\mp2\xi),$$

$$\omega_{C_\pm}(y,\eta)=\hat c(\pm1,\pm2\eta,2y).$$

Описан образ отображения μ.

Г.А.Виноградова

О МУЛЬТИПЛИКАТОРАХ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p СО СТЕПЕННЫМИ ВЕСАМИ

Пусть $L_{p,\sigma}(R^n,d\mu)$ – пространство, состоящее из всех функций $f(x)$, измеримых на R^n таких, что

$$\|f\|_{\infty,\sigma}=\left(\int_{R^n}(|x|^\sigma|f(x)|)^p\,d\mu\right)^{1/p}<\infty,$$

если $1\le p<\infty$, и

$$\|f\|_{\infty,\sigma}=\operatorname{esssup}\{|f(x)||x|^\sigma,\ x\in R^n\}<\infty,$$

где $d\mu$ – мера, инвариантная относительно растяжений пространства R^n, $d\mu=|x|^{-n}dx$.

Пусть S – пространство бесконечно дифференцируемых функций, убывающих быстрее любой степени $|x|^{-s}$ $(s>0)$. Через S^{00} обозначим множество функций f, преобразование Фурье $\hat f$ которых имеет компактный носитель в $R^n\setminus\{0\}$.

Измеримая функция m называется мультипликатором из $L_{p,\sigma+\lambda}(R^n,d\mu)$ в $L_{p,\lambda}(R^n,d\mu)$, если найдется постоянная C такая, что для любой функции $f\in S^{00}$

$$\|(m\hat f)^\vee\|_{p,\lambda}\le C\|f\|_{p,\sigma+\lambda}.$$

Получены достаточные условия для мультипликатора из $L_{p,\sigma+\lambda}(R^n,d\mu)$ в $L_{p,\lambda}(R^n,d\mu)$, которые включают неравенства типа

$$|D^\alpha m(x)|\le c|x|^{-\sigma-|\alpha|}\qquad \text{для всех } |\alpha|\le N.$$