... единственное решение $x = V(y) \in S_T(x)$. Очевидно, система $x = V(y)$, $y = K(x)$ эквивалентна задаче (6) — (8), а решение уравнения $x = V[K(x)]$ является решением задачи (1), (2).

Построим последовательные приближения $x_0(t) = f(0)$, $x_{i+1} = V[K(x_i)]$ и положим $z_i(t) = \sup\limits_{p \geqslant 0} \|x_{i+p}(t) - x_i(t)\|$. Из равенства $x_{i+1} = \Phi(x_{i+1}, K(x_i))$ и оценки (9) вытекает неравенство

$$z_{i+1}(t) \leqslant Bz_{i+1}(\psi_T(t)) + B\omega_v[\sup_p \|K(x_{i+p})(\psi_T(t)) - K(x_i)(\psi_T(t))\|], \quad t \in [0, T], \tag{10}$$

где $B = \|H^{-1}\|/(1-\varepsilon) < 1$. При достаточно малых T, r и ε имеем $\|K[t, s, \gamma_1 + f(-g_2^-(s)) - f(0), \theta_1 + f(-g_3^-(t)) - f(0)] - K[t, s, \gamma_2 + f(-g_2^-(s)) - f(0), \theta_2 + f(-g_3^-(t)) - f(0)]\| < 1$ при $(t, s, \gamma_i, \theta_i) \in G$ и $\dfrac{\omega_v(t)}{\omega_v(g_1(t))} < \rho - \dfrac{2\rho\varepsilon}{\|H^{-1}\|}$ при $t \in [0, T]$. Из этих неравенств следует, что

$$B\omega_v(\psi_T(t)) \leqslant q\omega_v(t), \quad t \in [0, T], \tag{11}$$

где $q = B\left(\rho - \dfrac{2\varepsilon\rho}{\|H^{-1}\|}\right) < \dfrac{1-\rho\varepsilon}{1-\varepsilon} < 1$ и $\sup\limits_p \|K(x_p)(t) - K(x_0)(t)\| \leqslant t$. Отсюда и из (10) получим $z_1(t) \leqslant Bz_1(\psi_T(t)) + q\omega_v(t)$, $t \in [0, T]$. В силу леммы $z_1(t) \leqslant \dfrac{q}{1-q}\omega_v(t)$.

Определим функции $\varphi^{[i]}$, $i \geqslant 0$, равенствами $\varphi^{[0]}(t) = t$, $\varphi^{[i+1]}(t) = \varphi(\varphi^{[i]}(t))$, $i \geqslant 0$, и предположим, что

$$z_i(t) \leqslant \frac{q}{1-q}\omega_v[\varphi^{[i-1]}(t)], \quad t \in [0, T]. \tag{12}$$

Тогда, используя условие 4), найдем, что при любом $p \geqslant 1$, некотором c, не зависящем от i, и малом T справедливо неравенство

$$\|K(x_{i+p+1})(t) - K(x_{i+1})(t)\| \leqslant Ct\varphi^{[i]}(t) \leqslant \varphi^{[i]}(t), \quad t \in [0, T].$$

Отсюда и из неравенств (10), (11) и неравенства $\varphi[\psi_T(t)] \leqslant \psi_T[\varphi(t)]$, $t \in [0, T]$, получим

$$z_{i+1}(t) \leqslant Bz_{i+1}(\psi_T(t)) + q\omega_v[\varphi^{[i]}(t)], \quad t \in [0, T].$$

В силу леммы оценка (12) справедлива и при замене i на $i+1$.

Так как $\varphi(t) < t$ при $t > 0$, то $\lim\limits_{i\to\infty} \varphi^{[i]}(t) \equiv 0$ равномерно по t. Следовательно, и $\lim\limits_{i\to\infty} \sup\limits_{t\in[0,T]} z_i(t) = 0$. Таким образом, последовательность $\{x_i\}$ фундаментальна. Ее предел является, очевидно, решением уравнения $x = V[K(x)]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и я. 1. Если $K(t, s, \gamma, \theta)$ не зависит от θ, то условия 3) и 4) теоремы можно опустить. В самом деле, существование и непрерывность оператора V обеспечиваются условиями 1) и 2). Если же $K(t, s, \gamma, \theta)$ не зависит от θ, то оператор K вполне непрерывен, следовательно, вполне непрерывен и оператор $V \circ K$, а так как $V \circ K: S_T(x) \to S_T(x)$, то существование решения уравнения $x = V[K(x)]$ вытекает из принципа Шаудера.

2. Теорема останется справедливой, если R^n и R^m заменить банаховыми пространствами X и Y соответственно. При этом необходимо лишь следующим образом переформулировать условие 2): существует непрерывная производная $\dfrac{\partial F}{\partial u}$, оператор $H = \dfrac{\partial F(0, f(0), 0)}{\partial u}$ обратим и спектральный радиус H^{-1} не превосходит $1/\rho < 1$.

Кубанский государственный университет

Поступила в редакцию
14 июля 1981 г.

УДК 517.929

А. Д. ВАЙНШТЕЙН, Л. И. РЕЙТБЛАТ, Б. З. ШАПИРО

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ОТ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Некоторые модели исследования операций сводятся к так называемой игре на истощение, которая описывается следующим образом. Имеются два игрока: A и B. Состояу игроков A и B соответственно, и вероятностью $p(x, y)$, с которой A снимает фишку у B (с вероятностью $q(x, y) = 1 - p(x, y)$ B снимает фишку у A). Проигравшим считается тот, у кого раньше не останется фишек. В предположении, что $p(x, y)$ — однородная функция нулевого порядка по своим аргументам, $p(x, y) = p\left(\frac{x}{x+y}\right) = p(t)$, в работах [1, 2] были получены асимптотические выражения для вероятности победы одного из игроков.

Другой задачей, возникающей при исследовании игры на истощение, является получение асимптотического выражения для математического ожидания $M(x, y)$ числа ходов до окончания игры. Легко показать, что $M(x, y)$ удовлетворяет разностному уравнению

$$M(x, y) = p(x, y) M(x-1, y) + q(x, y) M(x, y-1) + 1, \quad x, y \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$M(x, 0) = 0, \ x \geqslant 0, \ M(0, y) = 0, \ y \geqslant 0. \tag{2}$$

Для случая $p = \mathrm{const}$ эта задача исследована в работе [3].

Обобщая задачу (1), (2), приходим к изучению разностных уравнений следующего вида:

$$U(x, y) = p(x, y) U(x-1, y) + q(x, y) U(x, y-1) + f(x, y),$$
$$x, y \in \mathbf{N}, \ q(x, y) = 1 - p(x, y), \tag{3}$$

с начальными условиями

$$U(x, 0) = 0, \ x \geqslant 0, \ U(0, y) = 0, \ y \geqslant 0. \tag{4}$$

В настоящей работе исследуется асимптотика решений задачи (3), (4) в предположении однородности нулевого порядка $p(x, y)$ и при условии $f(x, y) = (x+y)^k \varphi\left(\frac{x}{x+y}\right) + o((x+y)^k)$, $k \geqslant 0$. Будет показано, что асимптотически решение разностной задачи (3), (4) вдоль любого луча $\frac{x}{x+y} = c$, $0 \leqslant c \leqslant 1$, ведет себя как решение дифференциальной задачи

$$p\left(\frac{x}{x+y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + q\left(\frac{x}{x+y}\right)\frac{\partial u}{\partial y} = (x+y)^k \varphi\left(\frac{x}{x+y}\right), \quad 0 \leqslant x, \ y < \infty, \tag{5}$$

$$u(x, 0) = 0, \ x \geqslant 0; \ u(0, y) = 0, \ y \geqslant 0. \tag{6}$$

Уточним понятие решения краевой задачи (5), (6).

Лемма 1. *Пусть функции $p(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют условиям:*

1) $0 \leqslant p(t) \leqslant 1$, $t \in [0; 1]$, $p(0) \neq 0$, $p(1) \neq 1$;

2) $p(t)$ и $\varphi(t)$ имеют в $[0; 1]$ непрерывные производные, удовлетворяющие условию Липшица;

3) существует единственный корень α уравнения $p(t) = t$, $0 < \alpha < 1$. Тогда существует единственное непрерывное решение краевой задачи (5), (6) с непрерывными частными производными везде, за исключением, быть может, луча $x/(x+y) = \alpha$.

Доказательство. Будем искать решение задачи (5), (6) в виде $u(x, y) = (x+y)^{k+1} g(x/(x+y))$, тогда из (5) следует, что $g(t)$ удовлетворяет уравнению

$$(p(t) - t) g'(t) + (k+1) g(t) = \varphi(t) \tag{7}$$

с краевыми условиями $g(0) = g(1) = 0$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$$g_1(t) = \exp\left(-(k+1)\int_0^t \frac{dz}{p(z) - z}\right)\int_0^t \frac{\varphi(z)}{p(z) - z}\exp\left((k+1)\int_0^z \frac{dw}{w - p(w)}\right) dz$$

— решение уравнения (7) с условием $g(0) = 0$ на отрезке $0 \leqslant t < \alpha$, а

$$g_2(t) = \exp\left(-(k+1)\int_t^1 \frac{dz}{z - p(z)}\right)\int_t^1 \frac{\varphi(z)}{z - p(z)}\exp\left((k+1)\int_z^1 \frac{dw}{w - p(w)}\right) dz$$

— решение уравнения (7) с условием $g(1) = 0$ на отрезке $\alpha < t \leqslant 1$. Кроме того, $\lim\limits_{t \to \alpha - 0} g_1(t) = \lim\limits_{t \to \alpha + 0} g_2(t) = \frac{\varphi(\alpha)}{k+1}$, в чем несложно убедиться, вычислив указанные пределы с помощью правила Лопиталя.

Таким образом, функция

$$u(x, y) = \begin{cases}(x+y)^{k+1} g_1(x/(x+y)), & 0 \leqslant x/(x+y) \leqslant \alpha, \\ (x+y)^{k+1} g_2(x/(x+y)), & \alpha \leqslant x/(x+y) \leqslant 1,\end{cases} \tag{8}$$

непрерывна и является решением краевой задачи (5), (6) везде, за исключением, быть может, луча $x/(x+y) = \alpha$. Из непрерывной дифференцируемости (вне луча $x/(x+y) = \alpha$) решения, задаваемого формулой (8), следует его единственность [4, с. 240]. Этим завершается доказательство леммы.

В дальнейшем нам понадобятся следующие обозначения: разностное выражение

$$L_n U(x, y) = n\left[U(x, y) - p\left(\frac{x}{x+y}\right) U\left(x - \frac{1}{n}, y\right) - q\left(\frac{x}{x+y}\right) U\left(x, y - \frac{1}{n}\right)\right]$$

и дифференциальное выражение $Lu(x, y) = p\left(\frac{x}{x+y}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + q\left(\frac{x}{x+y}\right)\frac{\partial u}{\partial y}$.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. *Пусть функции $p(t)$ и $\varphi(t)$ удовлетворяют условиям 1) — 3) леммы 1. Тогда для любого луча $x/(x+y) = c \in [0; 1]$ выполняется соотношение $U(x, y) = u(x, y) + o((x+y)^{k+1})$, где U — решение разностной задачи (3), (4), продолженное константой на каждый квадрат $(m-1; m] \times (n-1; n]$, $m, n \in \mathbf{N}$, u — решение дифференциальной задачи (5), (6).*

Для доказательства теоремы покажем, что построенное в лемме 1 решение краевой задачи (5), (6) может быть получено как предел последовательности классических решений возмущенных краевых задач следующего вида. Для каждого $\varepsilon > 0$ выберем дважды дифференцируемую кривую γ_ε таким образом: вне $\Delta_\varepsilon = \{(x, y) | 0 \leqslant x + y \leqslant \varepsilon, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\}$ γ_ε совпадает с осями координат, внутри Δ_ε γ_ε имеет вид $F(x, y) = c_\varepsilon$, где c_ε — некоторая константа, причем $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{\gamma_\varepsilon} > 0$, $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{\gamma_\varepsilon} > 0$ во всех внутренних точках Δ_ε. Пусть $G(a, \varepsilon)$ — область, ограниченная кривой γ_ε и прямой $x + y = a$, $a > \varepsilon$. Справедлива

Лемма 2. *Пусть u_ε — решение краевой задачи*

$$Lu_\varepsilon(x, y) = (x+y)^k \varphi\left(\frac{x}{(x+y)}\right), \quad u_\varepsilon|_{\gamma_\varepsilon} = 0 \tag{9}$$

в области $G(a, \varepsilon)$, u — решение задачи (5), (6), p и φ удовлетворяют всем условиям леммы 1. Тогда u_ε имеет липшицевы первые частные производные по x и y и в любой внутренней точке рассматриваемой области $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} u_\varepsilon(x, y) = u(x, y)$.

Доказательство. Существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения задачи (9) следуют из классических теорем о линейных уравнениях в частных производных первого порядка [4, с. 240—246]. Липшицевость производных доказывается аналогично с использованием условия 2) леммы 1.

Оценим теперь величину $|u(x, y) - u_\varepsilon(x, y)|$. Очевидно $v(x, y) = u(x, y) - u_\varepsilon(x, y)$ удовлетворяет задаче $Lv(x, y) = 0$, $v|_{\gamma_\varepsilon} = u|_{\gamma_\varepsilon}$. Из формулы (8) следует, что в Δ_ε $|u(x, y)| \leqslant A\varepsilon^{k+1}$, где A — некоторая константа, не зависящая от ε, следовательно, на γ_ε $|v(x, y)| \leqslant A\varepsilon^{k+1}$. Рассмотрим теперь произвольную точку $(x_0, y_0) \in G(a, \varepsilon)$. Через нее проходит характеристика уравнения (5), задаваемая системой

$$\frac{dx}{dt} = p\left(\frac{x}{x+y}\right), \quad \frac{dy}{dt} = 1 - p\left(\frac{x}{x+y}\right). \tag{10}$$

Очевидно система (10) задает монотонно неубывающую функцию $y(x)$. Следовательно, характеристика, проходящая через точку (x_0, y_0), пересечет γ_ε. Поскольку решение однородного уравнения постоянно вдоль характеристик, оценка $|v(x, y)| \leqslant A\varepsilon^{k+1}$ распространяется на всю область $G(a, \varepsilon)$, что завершает доказательство леммы.

Переход от разностного уравнения (3) к уравнению в частных производных (5) осуществляется следующим образом. Положим $U_n(x, y) = n^{-k-1} U(nx, ny)$, тогда из условий (3), (4) следует, что $U_n(x, y)$ является решением разностной задачи

$$L_n U_n(x, y) = (x+y)^k (\varphi(x/(x+y)) + \psi(n, x, y)),$$
$$U_n(x, 0) = U_n(0, y) = 0, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0,$$
$$\text{где} \lim_{n \to \infty} \psi(n, x, y) = 0. \tag{11}$$

Лемма 3. *Решение $U_n^\varepsilon(x, y)$ разностной задачи*

$$L_n U_n^\varepsilon(x, y) = (x+y)^k (\varphi(x/(x+y)) + \psi(n, x, y)), \quad U_n^\varepsilon|_{\gamma_\varepsilon} = 0,$$
$$\text{где} \lim_{n \to \infty} \psi(n, x, y) = 0, \tag{12}$$

при $n \to \infty$ равномерно сходится в области $G(a, \varepsilon)$ к решению краевой задачи (9) при любых $a > \varepsilon > 0$.

Доказательство. Достаточно показать устойчивость и аппроксимацию разностной схемы (11) [5, с. 176].

Для доказательства аппроксимации оценим величину

$$|L_n U_n^{\varepsilon}(x, y) - L_n u_{\varepsilon}(x, y)| = \left|(x+y)^k \left(\varphi\left(\frac{x}{x+y}\right) + \psi(n, x, y)\right) - \right.$$

$$- p\left(\frac{x}{x+y}\right) n\left(u_{\varepsilon}(x, y) - u_{\varepsilon}\left(x - \frac{1}{n}, y\right)\right) - q\left(\frac{x}{x+y}\right) n\left(u_{\varepsilon}(x, y) - \right.$$

$$\left.\left. - u_{\varepsilon}\left(x, y - \frac{1}{n}\right)\right)\right|.$$

По теореме Лагранжа

$$n\left(u_{\varepsilon}(x, y) - u_{\varepsilon}\left(x - \frac{1}{n}, y\right)\right) = \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x}(\mu, y), \quad x - \frac{1}{n} \leqslant \mu \leqslant x,$$

$$n\left(u_{\varepsilon}(x, y) - u_{\varepsilon}\left(x, y - \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y}(x, \nu), \quad y - \frac{1}{n} \leqslant \nu \leqslant y.$$

Кроме того, в силу леммы 2 $\left|\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x}(\mu, y) - \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x}(x, y)\right| \leqslant \frac{K(\varepsilon)}{n}$, $\left|\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y}(x, \nu) - \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial y}(x, y)\right| \leqslant \frac{K(\varepsilon)}{n}$, где $K(\varepsilon)$ — константа Липшица. С учетом этих формул имеем следующую оценку:

$$|L_n U_n^{\varepsilon}(x, y) - L_n u_{\varepsilon}(x, y)| \leqslant a^k |\psi(n, x, y)| + \frac{K(\varepsilon)}{n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Устойчивость схемы $Lu_{\varepsilon}(x, y) = f(x, y)$, $u_{\varepsilon}|_{\gamma_{\varepsilon}} = \xi(x, y)$ следует из оценки

$$\max_{G(a,\varepsilon)} |u_{\varepsilon}(x, y)| \leqslant \max\{\max_{\gamma_{\varepsilon}} \xi(x, y), \ a \max_{G(a,\varepsilon)} f(x, y)\},$$

которая легко получается по индукции. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 4. *Решение разностной задачи (11) при $n \to \infty$ равномерно сходится в области $H = \{(x, y) \mid 0 < b \leqslant x + y \leqslant a, \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0\}$ к решению краевой задачи (5), (6).*

Доказательство. Оценим величину погрешности $|U_n(x, y) - u(x, y)| \leqslant |U_n(x, y) - U_n^{\varepsilon}(x, y)| + |U_n^{\varepsilon}(x, y) - u_{\varepsilon}(x, y)| + |u_{\varepsilon}(x, y) - u(x, y)|$ для любого $\varepsilon > 0$. Здесь $u_{\varepsilon}(x, y)$ — решение краевой задачи (9), $U_n^{\varepsilon}(x, y)$ — решение разностной задачи (12). Из доказательства леммы 2 следует, что $|u_{\varepsilon}(x, y) - u(x, y)| \leqslant A\varepsilon^{k+1}$. Далее из принципа максимума для разностной схемы $L_n U_n = 0$ [5, с. 177] имеем $|U_n(x, y) - U_n^{\varepsilon}(x, y)| \leqslant A\varepsilon^{k+1}$. Наконец, в силу леммы 3 $|U_n^{\varepsilon}(x, y) - u_{\varepsilon}(x, y)| \leqslant K(\varepsilon)/n$. Из последних трех неравенств следует утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Из леммы 4 получаем $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x, y) = u(x, y)$.

Учитывая определение U_n, перепишем это равенство в виде $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U(nx, ny)}{n^{k+1} u(x, y)} = 1$.

Поскольку из формулы (8) $n^{k+1} u(x, y) = u(nx, ny)$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{U(nx, ny)}{u(nx, ny)} = 1$.

Теорема доказана.

Из теоремы 1, в частности, следует, что асимптотика для математического ожидания $M(x, y)$ числа ходов до окончания игры на истощение (задача (1), (2)) имеет следующий вид:

$$M(x, y) = \begin{cases} (x+y)\left(1 - \exp\left(-\displaystyle\int_0^{x/(x+y)} \frac{dt}{p(t) - t}\right)\right) + o(x+y), & 0 \leqslant \dfrac{x}{x+y} \leqslant \alpha, \\ (x+y)\left(1 - \exp\left(-\displaystyle\int_{x/(x+y)}^{1} \frac{dt}{t - p(t)}\right)\right) + o(x+y), & \alpha \leqslant \dfrac{x}{x+y} \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь асимптотику решения задачи (3), (4) вдоль произвольного луча, не проходящего через начало координат.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 вдоль любого луча $y = ax + b$, $a \geqslant 0$, выполняется соотношение $U(x, y) = U(x, y - b) + o((x+y)^{k+1})$, т. е. $U(x, y) = u(x, y - b) + o((x+y)^{k+1})$, где $u(x, y)$ — решение задачи (5), (6).*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(nx, ny+b)}{n^{k+1} u\left(x, y + \frac{b}{n}\right)} = 1, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{U(nx, ny)}{n^{k+1} u(x, y)} = 1.$$

Вычитая эти равенства, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(nx, ny+b)\, u(x, y) - U(nx, ny)\, u\left(x, y + \frac{b}{n}\right)}{n^{k+1} u(x, y)\, u\left(x, y + \frac{b}{n}\right)} = 0.$$

Согласно лемме 1, можно записать $u\left(x, y + \frac{b}{n}\right) = u(x, y) + \frac{b}{n}\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Подставляя это разложение в предыдущую формулу, получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{U(nx, ny+b) - U(nx, ny)}{n^{k+1} u(x, y)} = \lim_{n\to\infty} \frac{b\frac{\partial u}{\partial y}(x, y)\, U(nx, ny)}{n^{k+2} u(x, y)} = 0,$$

что и требовалось доказать.

В заключение отметим, что все изложенные результаты можно перенести на случай, когда множество нулей уравнения $p(t) = t$ имеет более сложную структуру. В частности, если это множество состоит из конечного числа точек и отрезков, причем $p(0) \neq 0$, $p(1) \neq 1$, то, исследуя особые точки уравнения (7) методами, изложенными в работах [6—8], можно получить аналог леммы 1. Доказательство остальных утверждений остается без изменения.

Литература

1. Brown R. H.— Oper. Res., 1963, vol. 11, N 3, p. 418—425.
2. Юшкевич А. А.— Теор. вероят. и ее примен., 1967, т. 12, вып. 2, с. 329—337.
3. Kaigh W. D.— Math. Magazine, 1979, vol. 52, N 1, p. 22—25.
4. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Наука, 1970.— 280 с.
5. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы.— М.: Наука, 1977.— 440 с.
6. Немыцкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.—Л.: Гостехиздат, 1949.— 550 с.
7. Андреев А. Ф. Особые точки дифференциальных уравнений.— Минск: Вышэйш. шк., 1979.— 136 с.
8. Андреев А. Ф., Пехенько И. В.— Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 5, с. 944—946.

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступила в редакцию 27 октября 1981 г.

УДК 517.926.4

И. В. ГАЙШУН, Н. А. ПОРТЯНКО

ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ *

Пусть E — действительное, F — действительное или комплексное банаховы пространства, $L(E; F)$ — банахово пространство линейных ограниченных отображений E в F. Рассмотрим вполне интегрируемое дифференциальное уравнение

$$y'h = Ahy \quad (h \in E), \tag{1}$$

в котором оператор A принадлежит пространству $L(E; L(F; F))$ и удовлетворяет равенству $AhAk = AkAh$ при любых h, k из E, штрих означает производную Фреше функции $y: E \to F$.

Обозначим через $D(x, y_0)$ решение уравнения (1), подчиненное начальному условию $D(0, y_0) = y_0 \in F$, а через $S(y_0)$ — орбиту точки y_0, т. е. $S(y_0) = D(E, y_0)$.

Справедливы следующие утверждения.

---

*) Полностью рукопись депонирована в ВИНИТИ № 254—84 Деп