ной костепени на абстрактные бесконечномерные многообразия с краем, для которых также верна формула Стокса.

В заключение автор благодарит О. Г. Смолянова за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Смолянов О. Г. Потоки де Рама и формула Стокса в гильбертовом пространстве//Докл. АН СССР. 1986. № 3. 554—558.
2. Шефер X. Топологические векторные пространства. М., 1971.
3. Debieve С. Integration of vector-valued functions with respect to vector-valued measures//Rev. roum. math. pures et appl. 1981. **26**, 7. 943—957.
4. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М., 1971.
5. Норин Н. В. Расширенный стохастический интеграл для негауссовских мер в локально выпуклом пространстве//Успехи матем. наук. 1986. **41**, вып. 3. 199—200.
6. Смолянов О. Г. Анализ на топологических линейных пространствах и его приложения. М., 1979.
7. Энгелькинг Р. Общая топология. М., 1986.
8. Угланов А. В. Поверхностные интегралы в банаховом пространстве//Матем. сб. 1979. **110**, № 2. 189—217.
9. Смолянов О. Г., Фомин С. В. Меры на топологических линейных пространствах//Успехи матем. наук. 1976. **31**, № 4. 3—56.

Поступила в редакцию
08.01.88

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1989. № 5

УДК 512.734

В. П. Костов, Б. З. Шапиро

ФЛАГИ В $\mathbf{R}^3$, ТРАНСВЕРСАЛЬНЫЕ К ДАННЫМ, ОБРАЗУЮТ *M*-МНОГООБРАЗИЕ

Определение. Два полных флага в $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{C}^n$) назовем трансверсальными, если коразмерность пересечения любых двух их подпространств равна минимуму из n и суммы их коразмерностей.

Теорема 1. *Для типичного набора флагов* в* $\mathbf{R}^3$ *множество* $F_{\mathbf{R}}$ *всех флагов, трансверсальных ко всем флагам набора, является вещественно алгебраическим M-многообразием, т. е. удовлетворяет соотношению* $\Sigma b_i(F_{\mathbf{R}})=\Sigma b_i(F_{\mathbf{C}})$, *где* b_i — *числа Бетти с коэффициентами в* $\mathbf{Z}_2$, *а* $F_{\mathbf{C}}$ — *комплексификация* $F_{\mathbf{R}}$.

Условия типичности в теоремах 1, 2 и 3 см. в п. 2.

Напомним, что для любого вещественно алгебраического многообразия $M_{\mathbf{R}}$ и его комплексификации $M_{\mathbf{C}}$ выполняется неравенство Смита: $\Sigma b_i(M_R)\leqslant\Sigma b_i(M_{\mathbf{C}})$.

Теорема 1 является следствием двух теорем 2, 3.

Теорема 2 (В. И. Арнольд, В. П. Костов). *Для типичного набора из k флагов в* $\mathbf{R}^3$ *многообразие* $F_{\mathbf{R}}$ *всех флагов, трансверсальных ко всем флагам набора, гомеоморфно несвязному объединению* k^3-k^2+k *трехмерных клеток.*

Теорема 3 (Б. З. Шапиро). *Для типичного набора из k флагов в* $\mathbf{C}^3$ *многообразие* $F_{\mathbf{C}}$ *всех флагов, трансверсальных ко всем флагам набора, не имеет кручения в целочисленных гомологиях, и числа Бет-*

1. Рассмотрим эквивалентную интерпретацию полных флагов в $\mathbf{R}^3$ как полных флагов на $\mathbf{R}P^2$.

Определение. Каждый флаг на $\mathbf{R}P^2$ состоит из прямой и точки. Бифуркационными линиями назовем прямые, соединяющие пары точек флагов.

2. Условия типичности набора полных флагов на $\mathbf{R}P^2$:

а) флаги попарно трансверсальны;

б) никакие три прямые флагов не пересекаются в одной точке;

в) никакие три точки флагов не лежат на одной прямой;

г) никакая бифуркационная линия не проходит через точку пересечения прямых флагов.

3. Доказательство теоремы 2. Зафиксируем типичный набор из k проективных флагов $\mathfrak{f}=(f_1, \ldots, f_k)$. Прямые флагов набора разбивают $\mathbf{R}P^2$ на $N_1=k(k-1)/2+1$ открытый многоугольник (см. условие б). Обозначим через M один из них. Рассмотрим множество $\Omega(M)$ флагов, трансверсальных к $f_1, \ldots, f_k$, точка которых лежит в M. Множество $\Omega(M)$ есть расслоение со слоем интервал, базой которого является множество μ прямых, пересекающих M и не проходящих через точки флагов $f_1, \ldots, f_k$.

4. Обозначим через $l_1, \ldots, l_k$ прямые на $(\mathbf{R}P^2)^*$, двойственные к точкам флагов набора $\mathfrak{f}$. Прямые $l_1, \ldots, l_k$ находятся в общем положении (см. условие в).

Определение. Двойственным многоугольником M^* к многоугольнику M на $\mathbf{R}P^2$ назовем многоугольник на $(\mathbf{R}P^2)^*$, точки которого двойственны к прямым, не пересекающим M.

Если M — выпуклый и аффинный, то M^* — также выпуклый и аффинный. Если M — открытый, то M^* — замкнутый, и наоборот.

Имеем $\mu=(\mathbf{R}P^2)^*\setminus(M^*\cup l_1\cup\ldots\cup l_k)$. Все прямые $l_1, \ldots, l_k$ пересекают замыкание многоугольника M^*.

5. Лемма. *Множество μ состоит из $k+q(M)$ открытых двумерных клеток, где $q(M)$ — число бифуркационных линий, пересекающих M.*

Следствие. *Множество $\Omega(M)$ состоит из $k+q(M)$ открытых трехмерных клеток.*

Доказательство леммы непосредственно вытекает из следующего, более общего предложения.

6. Предложение. *Пусть a — нестрого выпуклая область на* $\mathbf{R}P^2$. *Число частей, на которое* $\alpha=\mathbf{R}P^2\setminus\bar{a}$ *разбивается k прямыми в общем положении, каждая из которых пересекает $\bar{a}$, равно $k+r$, где r — число лежащих в α точек попарных пересечений прямых. Все части, на которые распадается α, стягиваемы.*

Доказательство. Для $k=1$ лемма очевидна. Пусть она доказана для $k-1$ и $\bar{a}$ пересекается с k-й прямой по отрезку (или точке) δ. Точки пересечения l_k с остальными прямыми, лежащие в α, разбивают $l_k\setminus\delta$ на $\nu+1$ интервал, где ν — число этих точек. Каждый из этих интервалов является простым путем, соединяющим две точки границы стягиваемой (по предположению индукции) области. Следовательно, добавление прямой l_k увеличивает число частей, на которое распадается α, ровно на $\nu+1$. Стягиваемость этих компонент очевидна.

прямыми флагов. В силу условий а) и г) $N_2=k^2(k-1)/2$, поэтому $N_3=k^3-k^2+k$. Теорема 2 доказана.

8. Доказательство теоремы 3. Определение. Шлейфом $Ш(f)$ полного флага f назовем множество всех не трансверсальных ему флагов.

Лемма. *Ограничение шлейфа полного флага f в $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{C}^n$) на дополнение в F_n (F_n — пространство полных флагов) до шлейфа трансверсального к f флага g диффеоморфно гиперповерхности, задаваемой уравнением*

$$\Delta=\Delta_1\cdot\ldots\cdot\Delta_{n-1}=0,$$

где Δ_i — определитель минора, образованного i первыми строками и i последними столбцами верхнетреугольной $(n\times n)$-матрицы с единичной диагональю.

Доказательство. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — фиксированный базис в $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{C}^n$). Построим по нему два трансверсальных флага f и g: i-мерные пространства флага f натянуты на $e_1, \ldots, e_i$, а i-мерные пространства флага g натянуты на $e_n, \ldots, e_{n-i+1}$. Так как группа $GL(n)$ транзитивно действует на парах трансверсальных флагов, то достаточно исследовать только пару f и g. Рассмотрим расслоение $\pi_n: GL(n)\to F_n$, где π_n сопоставляет каждой матрице полный флаг, i-мерное пространство которого натянуто на i первых строк матрицы. $\pi_n^{-1}(F_n\setminus Ш(g))$ состоит из матриц, имеющих отличными от нуля все главные миноры. Тогда можно построить сечение в $\pi_n^{-1}(F_n\setminus Ш(g))$, выбрав в слое над каждым флагом верхнетреугольную матрицу с единичной диагональю. Тем самым группа верхнетреугольных матриц с единичной диагональю отождествляется с клеткой $F_n\setminus Ш(g)$. При этом отождествлении условием нетрансверсальности k-мерного подпространства флага, соответствующего некоторой верхнетреугольной матрице, с $(n-k)$-мерным подпространством флага f является обращение в нуль определителя $((n-k)\times(n-k))$-минора, составленного из первых строк и последних столбцов матрицы. Лемма доказана.

9. Замечание. В трехмерном случае уравнения компонент шлейфа в $\mathbf{C}^3$ имеют вид

$$z=0,\quad z=xy. \tag{1}$$

10. Определение. Пусть $\widehat{f}=(f_1, \ldots, f_k)$ — произвольный набор полных флагов в $\mathbf{C}^n$. Обозначим через $\overline{Ш}(\widehat{f})$ одноточечную компактификацию множества $Ш(\widehat{f})=\bigcup_{i=1}^{k-1}Ш(f_i)\cap(F_n\setminus Ш(f_k))$, а через $F(\widehat{f})$ — $F_n\setminus\bigcup_{i=1}^{k}Ш(f_i)$.

11. Лемма. $\widetilde{H}_{i-1}(F(\widehat{f}))=\widetilde{H}^{n(n-1)-i}(\overline{Ш}(\widehat{f}))$.

Доказательство. Множество $F_n\setminus Ш(f_k)$ является клеткой вещественной размерности $n(n-1)$. Из двойственности Александера (см. [1]) имеем

где $\widetilde{H}_j$ и Hc^j — приведенные гомологии и когомологии с компактными носителями соответственно. Тогда

$$H_C^{n(n-1)-i}(Ш(\widehat{f}))=H^{n(n-1)-i}(\overline{Ш}(\widehat{f}),\infty)=\widetilde{H}^{n(n-1)-i}(\overline{Ш}(\widehat{f})),$$

где ∞ обозначает компактифицирующую точку.

12. Для вычисления $\widetilde{H}^*(Ш(\widehat{f}))$ воспользуемся спектральной последовательностью Майера—Вьеториса (см. [2]). Условия для ее применимости выполнены в силу замкнутости $Ш(f_i)$ в $Ш(\widehat{f})$.

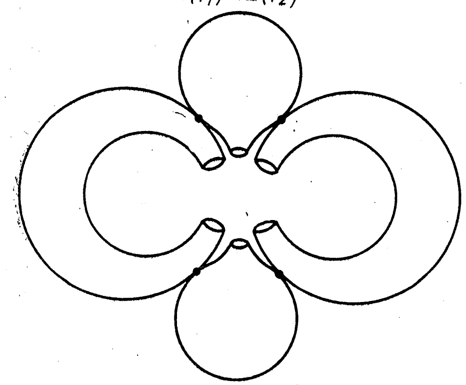
13. Лемма. *Каждая из двух компонент $Ш(f)$ в $\mathbf{C}^3$ биголоморфно эквивалентна $\mathbf{C}^2$. Компоненты пересекаются по паре комплексных прямых, пересекающихся в точке.*

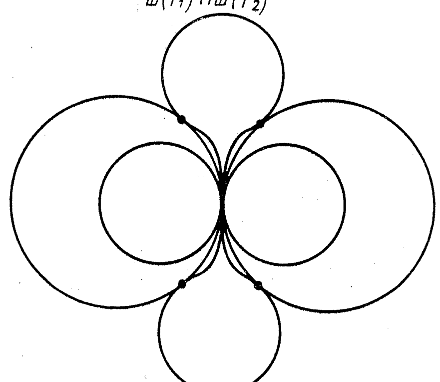
Доказательство. См. формулу (1).

14. Следствие. *Группы когомологий компактифицированного шлейфа не имеют кручений, и числа Бетти равны* 1, 0, 1, 2, 2.

Когомологии легко вычисляются из точной последовательности Майера—Виеториса.

15. Лемма. *Компактифицированный точкой комплекс пересечения $\overline{Ш(f_1)\cap Ш(f_2)}$ гомеоморфен комплексу, изображенному на рисунке б, и гомотопически эквивалентен букету из четырех сфер S^2 и шести окружностей.*





Доказательство. Опишем геометрически пересечение $Ш(f_1)\cap Ш(f_2)$ до компактификации. Оно состоит из четырех компонент:

A — прямая флага соединяет точки флагов f_1 и f_2;

B — прямая флага проходит через точку флага f_1, а точка флага лежит на прямой флага f_2;

C — точка флага совпадает с точкой пересечения прямых флагов f_1 и f_2;

D — прямая флага проходит через точку флага f_2, а точка лежит на прямой флага f_1.

Компоненты A и C диффеоморфны S^2 без точки, а B и D диффеоморфны S^2 без двух точек. Следующие пары компонент пересекаются по различным точкам: (A, B), (A, D), (B, C), (C, D). На рисунке

16. Следствие. *Группы когомологий комплекса* $\overline{\text{Ш}(\mathfrak{f}_1)\cap\text{Ш}(\mathfrak{f}_2)}$ *не имеют кручений, и числа Бетти равны* 1, 6, 4.

17. Лемма. *К трем флагам* $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{f}_3$ *на* $\mathbf{C}P^2$ *в общем положении нетрансверсальны шесть различных флагов. Прямые трех из них проходят через точки флагов* $\mathfrak{f}_i$ *и* $\mathfrak{f}_j$, *а точки лежат на прямой флага* $\mathfrak{f}_k$. *Прямые трех других соединяют точку пересечения прямых флагов* $\mathfrak{f}_i$ *и* $\mathfrak{f}_j$ *с точкой флага* $\mathfrak{f}_k$, *где* (i, j, k) *образуют произвольную перестановку чисел* (1, 2, 3).

18. Член E_1 спектральной последовательности Майера—Виеториса для приведенных когомологий комплекса $\overline{\text{Ш}}(\mathfrak{f})$ изображен в таб-

H^4	$2(k-1)\mathbf{Z}$		
H^3	$2(k-1)\mathbf{Z}$		
H^2	$(k-1)\mathbf{Z}$	$4C^2_{k-1}\mathbf{Z}$	
H^1		$6C^2_{k-1}\mathbf{Z}$	
H^0			$6C^3_{k-1}\mathbf{Z}$

лице (запись pZ обозначает свободную абелеву группу с p образующими).

19. В этой спектральной последовательности $d_2=d_3=\ldots=0$, а d_1 может отличаться от нуля для элементов $E^1_{20}\to E^1_{21}$. Дифференциал d_1 двойствен гомоморфизму в гомологиях, индуцированному вложением q-кратных пересечений в $(q-1)$-кратные. Покажем, что вложение 2-мерных гомологий $\overline{\text{Ш}(\mathfrak{f}_i)\cap\text{Ш}(\mathfrak{f}_j)}$ в 2-мерные гомологии $\overline{\text{Ш}(\mathfrak{f}_i)}$ индуцирует нулевой гомоморфизм. Действительно, любая из четырех образующих 2-мерных гомологий компонент A, B, C и D вкладывается в одну из двух компонент шлейфа $\overline{\text{Ш}(\mathfrak{f}_i)}$, диффеоморфных S^4. Следовательно, любой 2-цикл после вложения затягивается. Тем самым, $E_1=E_\infty$ и $E_1=\tilde{H}^*(\overline{\text{Ш}}(\mathfrak{f}))$, так как E_1 не имеет кручения. Число образующих $\tilde{H}^*(F(\mathfrak{f}))$ равно $6C^3_{k-1}+10C^2_{k-1}+5C^1_{k-1}=k^3-k^2+k-1$, что и доказывает теорему 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дольд А. Лекции по алгебраической топологии. М., 1976.
2. Браун К. С. Когомологии групп. М., 1987.

Поступила в редакцию
09.02.88