Функциональный анализ и его приложения,
1989, т. 23, вып. 1, 92—93

УДК 539.3

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ВЕЩЕСТВЕННЫЕ МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ

Б. З. Шапиро

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка, заданное на отрезке I оси времени t,

$$L_n[x] = x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \ldots + a_n(t)\, x = 0, \tag{1}$$

где $a_i(t) \in C^\infty[I]$.

1. Определение. Уравнение (1) называется неосцилляционным на I, если любое его ненулевое решение имеет на I менее n корней с учетом кратности. В противном случае уравнение называется осцилляционным.

2. Определение. Пусть V — n-мерное линейное пространство решений уравнения (1), а F — пространство полных флагов в V. Флаговой кривой уравнения (1) назовем отображение $f\colon I \to F$, сопоставляющее моменту $\tau \in I$ полный флаг в V, i-мерное подпространство которого состоит из решений уравнения (1), имеющих в момент τ корень кратности, не меньшей $n - i$.

3. Определение. Набор флагов из F называется трансверсальным, если коразмерность пересечения любого подмножества линейных подпространств, принадлежащих различным флагам набора, равна минимуму из n и суммы их коразмерностей.

4. Лемма. *Уравнение* (1) *неосцилляционно на I тогда и только тогда, когда любой набор попарно различных точек ее флаговой кривой является трансверсальным.*

5. Определение. Шлейфом $Ш_\alpha$ флага α называется множество всех не трансверсальных ему флагов.

По каждому полному флагу во всех грассманианах, пространствах полных и неполных флагов строятся клеточные разбиения Шуберта, клетки которых задаются условиями постоянства размерностей пересечения с подпространствами заданного полного флага (см. [1]). В пространстве полных флагов клетки разбиения Шуберта нумеруются перестановками. Шлейф $Ш_\alpha$ флага α является объединением всех клеток положительной коразмерности построенного по нему разбиения Шуберта. $Ш_\alpha$ является приводимой гиперповерхностью в F, состоящей из $n - 1$ неприводимой компоненты $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$, где Δ_i состоит из флагов, $(n - i)$-мерное подпространство которых нетрансверсально i-мерному подпространству заданного флага. Δ_i и Δ_{n-i} диффеоморфны по двойственности.

6. Теорема. *Следующие три условия эквивалентны:*

а) *уравнение* (1) *осцилляционно на* I;

б) *существует момент времени* τ, *отличный от начального, такой, что флаг начального момента и флаг момента* τ *на флаговой кривой уравнения* (1) *нетрансверсальны*;

в) *флаговая кривая уравнения* (1) *пересекает шлейф любого флага.*

Построим по флагу α шубертовские разбиения грассманианов $G_{k,n}$.

7. Лемма. *Кратность $\#_k$ пересечения ростка флаговой кривой уравнения* (1) *с Δ_k равна коразмерности клетки разбиения в $G_{k,n}$, в которой лежит k-мерная плоскость флага ростка в момент нетрансверсальности. Кратность пересечения ростка флаговой кривой со шлейфом $Ш_\alpha$ зависит только от клетки в $Ш_\alpha$, в которой лежит точка пересечения, и вычисляется по соответствующей этой клетке перестановке $(i_1, \ldots, i_n)$ следующим образом:*

$$\#_k = \max\left(0, \sum_{j=1}^{k} (i_j - j)\right).$$

8. Теорема. *Для неосцилляционного уравнения суммарная кратность пересечения флаговой кривой с Δ_k $(k = \overline{1, n-1})$ не превосходит $\dim G_{n,k} = k(n-k)$. Общая кратность пересечения флаговой кривой со шлейфом любого флага не превосходит $(n^3 - n)/6$.*

9. Следствие (обобщенная теорема перемежаемости Штурма). *Пусть флаговая кривая уравнения* (1) *пересекает k-ю компоненту шлейфа некоторого флага на некотором отрезке времени с суммарной кратностью $k(n-k)$, тогда на этом отрезке времени флаговая кривая пересекает шлейф любого флага.*

10. Теорема. *Уравнение* (1) *принадлежит границе области неосцилляционных уравнений тогда и только тогда, когда нетрансверсальными являются только концы его флаговой кривой.*

Обозначим через π отображение из пространства уравнений в пространство полных флагов F, сопоставляющее каждому уравнению правый конец его флаговой кривой.

11. Л е м м а. *Для любого уравнения* (1) *существует* $n(n-1)/2$*-параметрический росток его деформации в пространстве всех линейных уравнений, который невырожденно проектируется отображением* π *на некоторую окрестность правого конца флаговой кривой рассматриваемого уравнения.*

12. С л е д с т в и е. *Список особенностей границы области неосцилляционных уравнений, встречающихся в типичных семействах уравнений с некоторым числом параметров, совпадает со списком особенностей типичных сечений шлейфа с тем же числом параметров.*

Типичным семейством называется семейство, принадлежащее некоторому открытому всюду плотному множеству в пространстве семейств, а типичным сечением — сечение, трансверсальное шубертовской стратификации шлейфа.

13. Т е о р е м а. а) *Особенности типичных сечений шлейфа не меняются* (*с точностью до диффеоморфизма окрестности точки сечения*) *вдоль клеток шубертовского разбиения шлейфа*;

б) *список особенностей типичных* k*-параметрических сечений шлейфа конечен*;

в) *списки особенностей типичных* k*-параметрических сечений шлейфов растут с ростом размерности пространства и стабилизируются при размерности, равной* $2k$.

14. Л е м м а. *В типичных сечениях шлейфов любой размерности возникают с точностью до диффеоморфизма следующие особенности*:

при 2-х параметрах $xy=0$;

при 3-х параметрах $xyz=0$, $z(z-xy)=0$;

при 4-х параметрах $xyzu=0$, $xu-zy=0$, $zu(z-xy)=0$.

15. Г и п о т е з а. Пусть росток флаговой кривой уравнения (1) пересекает в некоторый момент шлейф, тогда этот росток переходит из одной локальной компоненты дополнения до шлейфа в другую.

16. В о п р о с. Определить число компонент связности дополнения в F до шлейфов двух трансверсальных полных флагов.

Критериям неосцилляционности дифференциальных уравнений посвящена обширная литература (см., например, [2; 3]). Задача изучения особенностей границы области неосцилляционных уравнений поставлена В. И. Арнольдом в [4] (см. также [5]). Автор приносит ему благодарность за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Фукс Д. Б.* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ. —1987. Т. 12. С. 253—314. 2. *Polia G.* // Trans. Amer. Math. Soc.— 1924. V. 24.— P. 312—324. 3. *Левин А. Ю.* // УМН.— 1969. Т. 24, вып. 2.— С. 43—96. 4. *Олейник О. А.*, *Шубин М. А.* // УМН.— 1982. Т. 37, вып. 6.— С. 264—269. 5. *Арнольд В. И.* // УМН.— 1986. Т. 41, вып. 4.— С. 153—154.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
29 января 1988 г.