Функциональный анализ и его приложения,
1985, т. 19, вып. 1, 20—24

УДК 514.8

МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМ НЬЮТОНА И АЙВОРИ

А. Д. Вайнштейн, Б. З. Шапиро

Известные теоремы Ньютона и Айвори [1, 2] утверждают, что потенциал заряженного металлического эллипсоида равен константе внутри эллипсоида и постоянен на конфокальных ему объемлющих эллипсоидах. В настоящей работе доказываются аналоги этих теорем для гиперболоидов любой сигнатуры в евклидовом пространстве любой размерности.

Авторы благодарят В. И. Арнольда за постановку задачи и постоянную поддержку, а также А. Б. Гивенталя и Б. В. Юсина за полезные обсуждения.

1. Трехмерный случай. Сначала сформулируем результат для случая однополостного гиперболоида в трехмерном пространстве. Включим гиперболоид в семейство конфокальных поверхностей. Это семейство высечет на поверхности гиперболоида ортогональную сеть линий. Будем называть замкнутые линии сети параллелями, а незамкнутые — меридианами гиперболоида. Система меридианов продолжается до расслоения ограниченной гиперболоидом односвязной области на незамкнутые кривые, которые будем называть меридианами внутренней области. Аналогично, семейство параллелей продолжается до расслоения ограниченной гиперболоидом внешней неодносвязной области на замкнутые кривые, которые назовем параллелями внешней области.

Теорема 1. *Существует единственный (с точностью до постоянного множителя) поверхностный ток, текущий вдоль меридианов гиперболоида, магнитное поле которого равно нулю во внутренней области и направлено вдоль параллелей во внешней области гиперболоида. Аналогично, существует единственный (с точностью до постоянного множителя) поверхностный ток, текущий вдоль параллелей гиперболоида, магнитное поле которого равно нулю во внешней области и направлено вдоль меридианов во внутренней области гиперболоида.*

Магнитное поле во внутренней области вне конфокального гиперболоиду заряженного проводящего эллипсоида с точностью до знака совпадает с электрическим полем эллипсоида, а магнитное поле во внешней области между полями конфокального двухполостного гиперболоида с точностью до знака совпадает с электрическим полем, создаваемым двумя равными по величине зарядами, помещенными на полях проводящего двухполостного гиперболоида.

Построенные поля доставляют также точные решения задач о потенциальном протекании несжимаемой жидкости через внутреннюю область трехосного гиперболоида и о его безвихревом обтекании.

Теорема 1 была сообщена авторам В. И. Арнольдом (см. [3, 4]), который поставил вопрос об обобщении этой теоремы на случай высших размерностей и сигнатур. На случай двухполостного гиперболоида в пространстве любого числа измерений теорема Ньютона была перенесена В. И. Арнольдом [5,6], а теорема Айвори — О. П. Щербаком.

2. Общий случай. Рассмотрим в евклидовом n-мерном пространстве центральную гиперповерхность второго порядка. Включим нашу гиперповерхность, в семейство конфокальных поверхностей

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i+\lambda} = 1, \tag{1}$$

$a_n < a_{n-1} < \ldots < a_{k+2} < 0 < a_{k+1} < \ldots < a_1$, в качестве поверхности $\lambda = 0$ и определим эллиптические координаты точки пространства как значения λ, для которых гиперповерхности семейства (1) проходят через эту точку. Наша гиперповерхность диффеоморфна прямому произведению $S^l \times$ $\times\, \mathbf{R}^k$, $k + l = n - 1$. Она делит пространство на две части: внутреннюю, диффеоморфную $D^{l+1} \times \mathbf{R}^k$, и внешнюю, диффеоморфную $S^l \times \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}_+$, где $\mathbf{R}_+$ — вещественная полуось.

Существуют два расслоения внутренней части:

а) на «меридианы», диффеоморфные $\mathbf{R}^k$ и задаваемые условием постоянства отрицательных (во внутренней части) эллиптических координат;

б) на области, ортогональные «меридианам», диффеоморфные D^{l+1} и задаваемые условием постоянства положительных (во внутренней части) эллиптических координат.

Аналогично, существуют два расслоения внешней части:

а) на «параллели», диффеоморфные S^l и задаваемые условием постоянства положительных (во внешней части) эллиптических координат;

б) на области, ортогональные «параллелям», диффеоморфные $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}_+$ и задаваемые условием постоянства отрицательных (во внешней части) эллиптических координат.

Пусть ω — произвольный поток, рассматриваемый как форма с коэффициентами в обобщенных функциях (см. [7]). Форму ω будем называть гармонической вне нашей гиперповерхности, если она непрерывна вне этой гиперповерхности, козамкнута, а ее внешняя производная есть форма, сосредоточенная на гиперповерхности.

Т е о р е м а 2. 1) *Существует единственная (с точностью до постоянного множителя) нетривиальная во внутренней части пространства и гармоническая вне гиперповерхности дифференциальная форма* ω^+, *разложимая в эллиптических координатах и не имеющая вещественных полюсов;*

2) *существует единственная (с точностью до постоянного множителя) нетривиальная во внешней части пространства и гармоническая вне гиперповерхности дифференциальная форма* ω^-, *разложимая в эллиптических координатах и не имеющая вещественных полюсов.*

Формы ω^+ и ω^- могут быть вычислены в явном виде.

Т е о р е м а 3. 1) *Форма* ω^+ *тождественно равна нулю во внешней части пространства, а во внутренней имеет вид* $\omega^+ = \Phi_l(\xi)\, d\xi$, *где* $d\xi = d\xi_1 \wedge \ldots \wedge d\xi_l$, $\xi_l \leqslant \xi_{l-1} \leqslant \ldots \leqslant \xi_1$ — *положительные (во всем пространстве) эллиптические координаты;*

2) *Форма* ω^- *тождественно равна нулю во внутренней части пространства, а во внешней имеет вид* $\omega^- = \Phi_k(\eta) d\eta$, *где* $d\eta = d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_k$, $\eta_k \leqslant \eta_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant \eta_1$ — *отрицательные (во всем пространстве) эллиптические координаты.*

Т е о р е м а 4. *Функция* $\Phi_m(x)$ *задается формулой*

$$\Phi_m(x) = \Phi_m(x_1, \ldots, x_m) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant m} (x_i - x_j) \prod_{i=1}^{m} \prod_{j=1}^{n} (x_i + a_j)^{-1/2}. \tag{2}$$

Геометрический смысл формулы (2) состоит в следующем.

Построим по нашей гиперповерхности два множества. Первое лежит во внутренней части пространства и получается, если зафиксировать координаты $\eta_k = -a_2 < \eta_{k-1} = -a_3 < \ldots < \eta_1 = -a_{k+1} = \zeta$; второе лежит во внешней части пространства и получается, если зафиксировать координаты $\zeta = -a_{k+2} = \xi_l < \ldots < -a_{n-1} = \xi_2 < -a_n = \xi_1$. Построенные множества назовем фокальными множествами нашей гиперповерхности.

Предложение. Фокальные множества являются гладкими многообразиями. Первое из них — двухполостный гиперболоид, диффеоморфный несвязному объединению двух экземпляров $\mathbf{R}^l$, второе — эллипсоид, диффеоморфный S^k.

Гомеоидной плотностью на невырожденной центральной гиперповерхности второго порядка V называется старшая форма, которая получается из формы евклидова объема слоя, заключенного между V и гиперповерхностью, гомотетичной V относительно центра, при бесконечном уменьшении толщины слоя. Гомеоидная плотность на пересечении невырожденных центральных гиперповерхностей определяется аналогично. На фокальных множествах гомеоидная плотность определяется как предел соответствующих форм на невырожденных многообразиях-пересечениях при фиксированном значении интеграла от этих форм по многообразию.

Теорема 5. *Форма ω^+ во внутренней части пространства и форма ω^- во внешней части индуцируются из гомеоидных плотностей на фокальных множествах переносом вдоль трансверсальных к ним гиперповерхностей семейства* (1).

Замечание. Утверждение теоремы 5 останется справедливым, если вместо первого фокального множества рассмотреть многообразие, задаваемое условиями постоянства координат $-a_1 < \eta_k < -a_2 < \eta_{k-1} < \ldots$ $\ldots < \eta_1 = -a_{k+1} = \zeta$ (оно диффеоморфно несвязному объединению 2^k экземпляров $\mathbf{R}^l$), а вместо второго — многообразие, задаваемое условиями постоянства координат $\zeta = -a_{k+1} = \xi_l < \ldots < \xi_2 < -a_n < \xi_1$ (оно диффеоморфно несвязному объединению 2^{l-1} экземпляров S^k).

3. Доказательства теорем. Доказательство теорем 2—4. Пусть ω — искомая форма, тогда

$$d * \omega = 0, \quad d\omega = \delta(\zeta)\, d\zeta \wedge \Omega; \tag{3}$$

здесь $\delta(\zeta)$ — дельта-функция, Ω — форма на гиперповерхности. В силу предположений теоремы 2, ищем ω в виде $\omega = a(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi' \wedge d\eta'$, где $d\xi' = d\xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge d\xi_{i_q}$, $d\eta' = d\eta_{j_1} \wedge \ldots \wedge d\eta_{j_r}$. Тогда из (3) получаем

$$d * \omega = d\,(a h_{\xi''} h_{\eta''} h_\zeta h_{\xi'}^{-1} h_{\eta'}^{-1}\, d\xi'' \wedge d\zeta \wedge d\eta'') = 0,$$

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial a}{\partial \xi_i''}\, d\xi_i'' \wedge d\xi' \wedge d\eta' + \sum_j \frac{\partial a}{\partial \eta_j''}\, d\eta_j'' \wedge d\xi' \wedge d\eta' + \frac{\partial a}{\partial \zeta}\, d\zeta \wedge d\xi' \wedge d\eta' = \delta(\zeta)\, d\zeta \wedge \Omega. \tag{4}$$

Здесь $d\xi''$ — разложимая форма, дополняющая $d\xi'$ до $d\xi$, $h_{\xi'}$ — произведение коэффициентов Ламэ, соответствующих координатам, входящим в $d\xi'$, $d\eta''$, $h_{\xi''}$, $h_{\eta'}$, $h_{\eta''}$ определяются аналогично. Из (4) получаем систему уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial \xi_i'} \left(\frac{a h_{\xi''} h_{\eta''} h_\zeta}{h_{\xi'} h_{\eta'}} \right) = \frac{\partial}{\partial \eta_j'} \left(\frac{a h_{\xi''} h_{\eta''} h_\zeta}{h_{\xi'} h_{\eta'}} \right) = 0, \\ \frac{\partial a}{\partial \xi_i''} = \frac{\partial a}{\partial \eta_j''} = 0, \\ \frac{\partial a}{\partial \zeta} = \delta(\zeta)\, b(\xi, \eta), \end{gathered} \tag{5}$$

причем $\Omega = b(\xi, \eta)\, d\xi' \wedge d\eta'$.

Учитывая явный вид коэффициентов Ламэ для эллиптических координат [8], получим

$$\frac{h_{\xi''} h_{\eta''} h_{\zeta}}{h_{\xi'} h_{\eta'}} = \frac{\Phi_{l-q}(\xi'')\,\Phi_{k-r}(\eta'')\,\Phi_1(\zeta)}{\Phi_q(\xi')\,\Phi_r(\eta')} \cdot \frac{\prod\limits_i (\xi_i'' - \zeta) \prod\limits_j (\eta_j'' - \zeta) \prod\limits_{t,u} (\xi_t'' - \eta_u'')}{\prod\limits_{v,w} (\xi_v' - \eta_w')},$$

где $\Phi_m(x)$ определены формулой (2). Подставляя в (5) и решая уравнения в выписанном порядке, получим

$$\begin{aligned} b(\xi, \eta) &= B\Phi_q(\xi')\,\Phi_r(\eta') \prod_{i,j} (\xi_i' - \eta_j'), \\ a(\xi, \eta, \zeta) &= (\chi(\zeta) + C)\, b(\xi, \eta), \end{aligned} \tag{6}$$

где $\chi(\zeta)$ — функция Хевисайда, B и C — некоторые константы.

Рассмотрим теперь условие отсутствия полюсов у ω. Учитывая, что сами эллиптические координаты вырождаются в некоторых точках пространства, приходим к изучению нулей выражения

$$\prod_i (\xi_i' - \zeta) \prod_j (\eta_j' - \zeta) \prod_{m,p} (\xi_m' - \eta_p'') \prod_{s,t} (\xi_s' - \xi_t'') \prod_{u,v} (\eta_u' - \xi_v'') \prod_{w,z} (\eta_w' - \eta_z'').$$

Поскольку всегда $-a_1 \leqslant \eta_k \leqslant -a_2 \leqslant \ldots \leqslant -a_{k+1} \leqslant \zeta \leqslant -a_{k+2} \leqslant \leqslant \xi_l \leqslant \ldots \leqslant -a_n \leqslant \xi_1$, получаем, что $\prod\limits_{m,p} (\xi_m' - \eta_p'')$ и $\prod\limits_{u,v} (\eta_u' - \xi_v'')$ не обращаются в нуль в E^n. Далее, выражения $\prod\limits_{s,t} - (\xi_s' \xi_t'')$ и $\prod\limits_{w,z} (\eta_w' - \eta_z'')$ обязательно имеют нули как при $\zeta > 0$, так и при $\zeta < 0$, если только число сомножителей в этих произведениях не равно нулю. Отсюда получаем, что либо $d\xi' = d\xi$, либо $d\xi'' = d\xi$; аналогично, либо $d\eta' = d\eta$, либо $d\eta'' = d\eta$. Наконец, выражение $\prod\limits_i (\xi_i' - \zeta)$ имеет нуль при $\zeta > 0$, а выражение $\prod\limits_j (\eta_j' - \zeta)$ — при $\zeta < 0$. Следовательно, если $d\xi' = d\xi$, то $d\eta'' = d\eta$ и $C = 0$, если же $d\xi'' = d\xi$, то $d\eta' = d\eta$ и $C = -1$. Отсюда и из (6) вытекают сформулированные результаты.

Теорема 1 вытекает из теорем 2 и 3; при этом ток интерпретируется как форма Ω, а магнитное поле — как векторное поле, соответствующее форме $* \omega$.

Доказательство теоремы 5. Поскольку интересующие нас формы определены с точностью до постоянного множителя, достаточно показать, что для любой пары точек $x' = (\xi', \eta, \zeta)$ и $x'' = (\xi'', \eta, \zeta)$ внутренней части пространства отношение $\omega^+(x')/\omega^+(x'')$ равно отношению гомеоидных плотностей в точках ξ' и ξ'' на первом фокальном множестве (координаты η, ζ точек x' и x'' не имеет смысла брать различными, так как ни ω^+, ни гомеоидная плотность от них не зависят).

Очевидно, гомеоидная плотность на фокальном множестве обратно пропорциональна произведению коэффициентов Ламэ, соответствующих зафиксированным эллиптическим координатам (см. [9]). Отсюда отношение гомеоидных плотностей в точках ξ' и ξ'' равно

$$\frac{h_\eta(x'')\, h_\zeta(x'')}{h_\eta(x')\, h_\zeta(x')} = \left(\prod_{i,j} \frac{\xi_i'' - \eta_j}{\xi_i' - \eta_j} \prod_m \frac{\xi_m'' - \zeta}{\xi_m' - \zeta} \right)^{1/2}.$$

С другой стороны, из теорем 3 и 4 имеем

$$\frac{\omega^+(x')}{\omega^+(x'')} = \frac{\Phi_l(\xi')\, d\xi(x')}{\Phi_l(\xi'')\, d\xi(x'')} = \frac{\Phi_l(\xi')\, h_\xi(x'')}{\Phi_l(\xi'')\, h_\xi(x')} = \left(\prod_{i,j} \frac{\xi_i'' - \eta_j}{\xi_i' - \eta_j} \prod_m \frac{\xi_m'' - \zeta}{\xi_m' - \zeta} \right)^{1/2}.$$

Теорема 5 для формы ω^+ доказана. Доказательство теоремы для формы ω^- проводится аналогично.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии.— М.; Л.: Изд. АН СССР, 1936.
2. *Ivory J.* On the attractions of homogeneous ellipsoids.— Philos. Trans., 1809, v. 99, p. 345—372.
3. *Арнольд В. И.* Магнитные аналоги теорем Ньютона и Айвори.— УМН, 1983, т. 38, вып. 5, с. 145—146.
4. *Arnold V. I.* Some algebro-geometrical aspects of the Newton attraction theory.— Arithmetic and geometry, v. 2: Geometry.—Birkhäuser, 1983.
5. *Арнольд В. И.* О ньютоновском потенциале гиперболических слоев.— Тр. Тбилисского ун-та, 1982, вып. 232—233, сер. мат. мех., астр., № 13—14, с. 23—29.
6. *Арнольд В. И.* О ньютоновском притяжении скоплений пылевидных частиц.— УМН, 1982, т. 37, вып. 4, с. 125.
7. *Де Рам Ж.* Дифференцируемые многообразия.— М.: ИЛ, 1956.
8. *Якоби К.* Лекции по динамике.— М.; Л.: Гостехиздат, 1936.
9. *Муратов Р. З.* Потенциалы эллипсоида.— М.: Атомиздат, 1976.

Всесоюзный научно-исследовательский
биотехнический институт

Поступило в редакцию
11 июля 1983 г.